



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

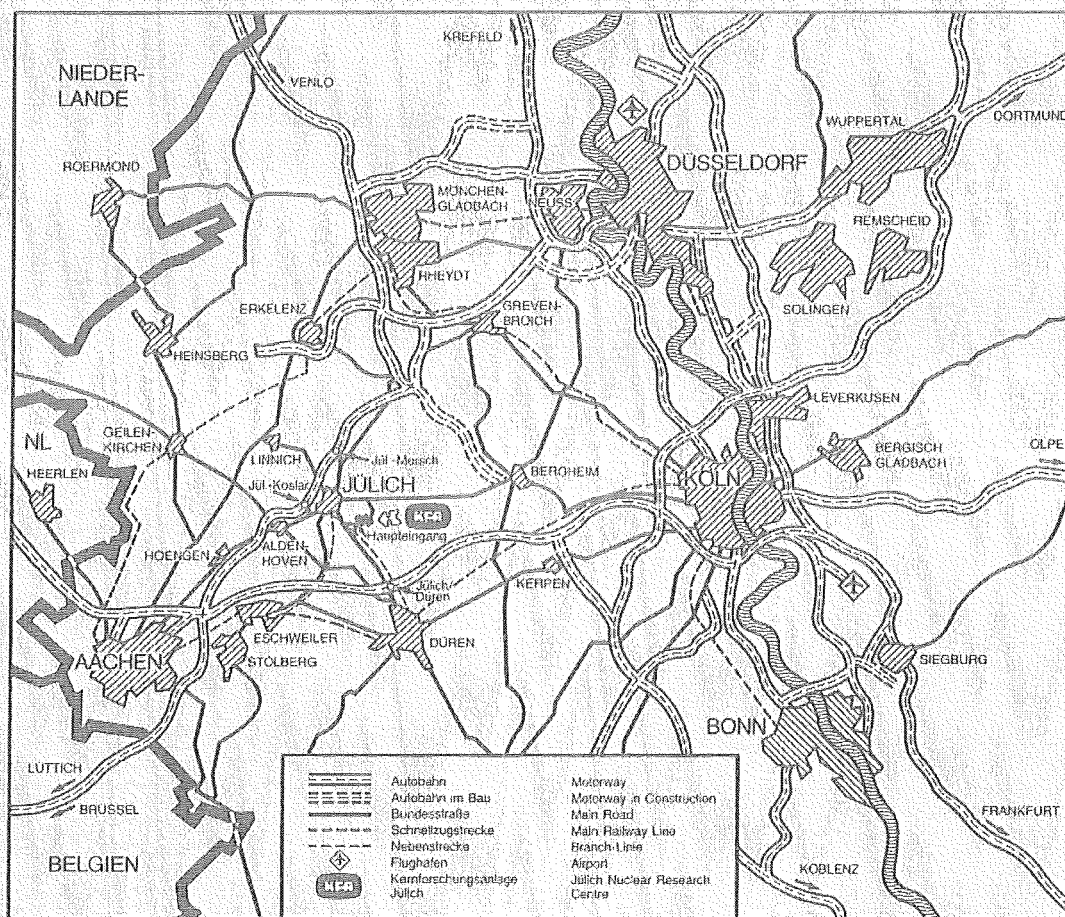
Institut für Kernphysik

**Zur mesonentheoretischen Beschreibung
der Lambda-Nukleon-Wechselwirkung**

von

B. Holzenkamp

Jül-Spez-315
Mai 1985
ISSN 0343-7639



Als Manuskript gedruckt

Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 315
Institut für Kernphysik Jül-Spez-315

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH
 Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)
 Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

Zur mesonentheoretischen Beschreibung der Lambda-Nukleon-Wechselwirkung

von

B. Holzenkamp

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Überblick	1
2. Ein-Boson-Austauschpotentiale	6
2.1 Allgemeine Erläuterungen	6
2.2 OBEPs in der Helizitätsdarstellung	10
2.2.1 Partialwellenzerlegung der OBEPs	16
2.2.2 Formfaktoren	26
2.2.3 Bemerkung zum Austauschdiagramm	26
2.2.4 Transformation der Partialwellen in die $ JMLS\rangle$ -Basis	31
2.3 Operatorformen der Lambda-Nukleon-OBEPs	34
2.3.1 Qualitativer Vergleich: ΛN - NN -OBEPs	39
3. Die Kopplungskonstanten im SU_3 -Modell	57
3.1 Reguläre Darstellung einer Lie-Algebra	57
3.2 Konstruktion von SU_3 -invarianten Skalaren	65
3.3 Die SU_3 -Kopplungskonstanten	68
4. Das Lambda-Nukleon-System	71
4.1 Zusätzliche Box-Diagramme in der ΛN -Streuung	75
4.2 Die Partialwellendarstellung der Streugleichung	78
4.3 Numerische Lösungsmethode der Streugleichung	81
4.4 Berechnung der Streuphasen	86

	Seite
5. Resultate und Diskussionen	90
5.1 Wirkung der verschiedenen Mesonen auf die Streuphasen	90
5.2 Vergleich verschiedener Behandlungsweisen des ΛN -Systems	93
5.3 Die Größe der zusätzlichen Box-Diagramme	104
5.4 Streuphasen	111
 Anhang 1	 116
 Anhang 2	 121
 Anhang 3	 130
 Anhang 4	 137
 Literatur	 140
 Danksagung	 142

1. Überblick

Schon seit vielen Jahren ist man daran interessiert, eine theoretische Beschreibung von Hyperkernen zu finden. Ideale Studienobjekte in diesem Gebiet sind die leichten Λ -Hyperkerne wie ${}^1_1\text{H}^3$, ${}^1_2\text{He}^4$, usw. Die ersten Arbeiten in diesem Bereich wurden durchgeführt von Herndon, Tang, Schmid (HTS65, HT67). Sie benutzten für ihre ΛN -Streurechnungen ein einfaches spinabhängiges Zentralpotential mit hard core, das sie aus der Analyse von s-Schalen-Hyperfragmenten gewannen. Andere Autoren (BR70,73, DH70) übernahmen ein solches Zentralpotential für Λ -Bindungsenergierechnungen oder benutzten andere Typen von effektiven Wechselwirkungen, wie beispielsweise ein Potential vom Skyrme-Type (RAY76,81, BOU80).

Das Problem bei diesen Rechnungen war und ist stets die "freie" ΛN -Wechselwirkung als Ausgangspunkt für die Konstruktion einer effektiven ΛN -Wechselwirkung im Medium. Diese mehr oder weniger phänomenologischen Ansätze, wie etwa das Skyrme-Potential, besitzen alle den Nachteil, nicht die ganze ΛN -Wechselwirkung darzustellen, sondern immer nur gewisse Partialwellen. So beschreibt z.B. das Zentralpotential von (HT65) nur die ΛN -Wechselwirkung in s-Zuständen.

Einen verbesserten Zugang zur Beschreibung der ΛN -Wechselwirkung bietet die von Yukawa begründete Mesonentheorie der Kernkräfte. Es wird angenommen, daß die Kräfte zwischen den Baryonen durch den Austausch von Mesonen vermittelt werden. Die in diesem Modell mikroskopisch herleitbaren Ein-Boson-Austausch-Potentiale, OBEP, werden mit großem Erfolg bei der Behandlung des Nukleon-Nukleon-Systems angewendet (Bonn-Potential). Mehrere Arbeiten zur simultanen Beschreibung der Nukleon-Nukleon- und der Hyperon-Nukleon-Streuung im Rahmen des Ein-Boson-Austauschmodells wurden von Nagels, Rijken und de Swart (NRS75,77, 79, NAG75) durchgeführt. Sie definierten die Potentiale im Impulsraum, gingen

dann mittels der Fouriertransformation in den Ortsraum und lösten dort die Schrödingergleichung. Diese analytische Ortsraum-Transformation beinhaltet einige Näherungen. Bis auf wenige spezielle nichtlokale Operatoren müssen alle Nichtlokalitäten vernachlässigt werden.

Der Gegenstand der vorliegenden Diplomarbeit ist die Untersuchung der ΛN -Ein-Boson-Austausch-Potentiale. Diese Untersuchungen sind zu verstehen als ein erster Schritt in Richtung auf Kernstrukturrechnungen von Hyperkernen mit einem mikroskopischen Potential. Es ist somit nicht das Ziel dieser Arbeit, eine "fertige" ΛN -Wechselwirkung zu präsentieren, was aufgrund der spärlichen experimentellen Daten in diesem Gebiet zur Zeit auch gar nicht möglich wäre, sondern es sollen stattdessen die Auswirkungen verschiedener Näherungen in der Berechnung der Feynman-Graphen auf das ΛN -Potential und auf die ΛN -Streuphasen studiert werden.

Eine Besonderheit im ΛN -System ist das Auftreten einer Kopplung zwischen ΛN - und ΣN -Kanälen, d.h. das gleichzeitige Auftreten der Reaktionen $\Lambda N \rightarrow \Lambda N$ und $\Lambda N \rightarrow \Sigma N$ im Isospin- $1/2$ -Kanal, denn die Sigma-Schwelle liegt relativ niedrig (Massendifferenz zwischen Λ und Σ : 77 MeV). Diese Tatsache, die das ΛN -System wesentlich verkompliziert, wurde bei vielen Rechnungen in einer ersten Näherung vernachlässigt (HTS65). Die Arbeiten von (NRS75,77,79) vermeiden diese Näherung. Sie lösen die gekoppelten Schrödingergleichungen im Ortsraum. Allerdings berücksichtigen sie gleichzeitig den Beitrag eines effektiven skalaren σ -Mesons. Da das effektive σ -Meson Beiträge von Termen höherer Ordnung simulieren soll, könnte dies eine Art Doppelzählung bedeuten.

In dieser Arbeit wird der Hauptbeitrag der $\Lambda \Sigma$ -Kopplung in der Weise berücksichtigt, daß sämtliche Box-Diagramme mit einem Nukleon-Sigma-Zwischenzustand mitgenommen werden. Es zeigt sich, daß die zusätzlichen Boxen in dieselbe

Richtung gehen wie das σ -Meson, daher wurde in den Rechnungen mit Boxen die σ -Kopplung etwas reduziert.

Der Ausgangspunkt sämtlicher Rechnungen ist der Formalismus der sog. nicht-kovarianten Störungstheorie. Dadurch wird die Willkür in der Wahl der Greenfunktionen vermieden, wie sie z.B. in der Reduktion der vierdimensionalen Bethe-Salpeter-Gleichung auf die dreidimensionale Blankenbecler-Sugar-Gleichung auftritt.

Alle Rechnungen werden im Impulsraum durchgeführt unter Mitnahme sämtlicher Nichtlokalitäten.

Ausgehend von diesen Ergebnissen lassen sich verschiedene Näherungen untersuchen, wie z.B. die nicht-relativistische Behandlung der ΛN -Vertices. Diese Beschreibung entspricht den Ortsraumrechnungen. Ein weiteres Untersuchungsobjekt ist der Einfluß der mesonischen Retardierungseffekte auf das ΛN -System.

Aber auch das ΛN -Potential selbst soll in seiner Struktur untersucht und auf charakteristische Unterschiede zum NN -Potential hingewiesen werden. Diese Vergleiche, die an den entsprechenden Stellen diskutiert werden, sind zum jetzigen Zeitpunkt nicht so sehr von quantitativer Natur, sondern sollen in erster Linie qualitative Aussagen darstellen, da die Kopplungen an den ΛN -Vertices aufgrund der experimentellen Situation nur sehr unsicher sein können.

Um ein Ergebnis dieser Untersuchungen vorwegzunehmen: Es stellt sich heraus, daß die nicht-relativistische Behandlung des ΛN -Systems sich von der relativistischen in einigen Punkten doch wesentlich unterscheidet. So machen sich z.B. in der Berechnung der Streuphasen, speziell in den S -Phasen, auch schon bei kleinen Laborenergien die Näherungen relativ stark bemerkbar, während für höhere Partialwellen der Unterschied abnimmt. Diese Tendenz sollte jedoch nicht

überraschen, da für höhere Bahndrehimpulse der Term erster Ordnung hauptsächlich die Streuphasen bestimmt (Born-Näherung), d.h. die Integration über alle Zwischenenergien wird dort unwichtig.

In den Partialwellen des ΛN -Potentials zeigen sich ebenfalls nicht mehr zu vernachlässigende Differenzen, allerdings hier erst bei höheren Energien und wiederum besonders in der Wechselwirkung der S-Zustände. Es erscheint daher sinnvoll, für eine in Zukunft geplante Behandlung des ΛN -Systems, insbesondere Kernmaterierechnungen, das volle relativistische "bare-potential" zu nehmen.

Diese Arbeit ist folgendermaßen angelegt:

Im zweiten Kapitel werden die ΛN -OBEPs hergeleitet und in ihre Partialwellen zerlegt. Dies geschieht als Vorbereitung auf die später zu lösende Streugleichung. Um dieses Kapitel übersichtlich zu halten, wurden die in diesem Zusammenhang auftretenden Formeln, die einen wesentlich größeren Umfang annehmen als die entsprechenden Beziehungen im NN-Fall, größtenteils in den Anhang verbannt.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird ein kleiner Exkurs unternommen: Es sollen die ΛN -OBEPs in ihrer Struktur mit den NN-OBEPs verglichen werden. Dazu werden die Potentiale nicht in Partialwellen zerlegt, sondern in ihrer Operatorform angegeben, denn in dieser Form ist es leichter, auf charakteristische Unterschiede hinzuweisen und ebenso auch Gemeinsamkeiten zu diskutieren.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit den Kopplungskonstanten im SU_3 -Modell. Es wird die Herleitung skizziert, wie man aus der Kopplung zweier Baryonmultipletts und eines Mesonmultipletts zu SU_3 -Skalaren die Relationen zwischen allen Baryon-Baryon-Meson-Kopplungskonstanten findet.

Der Inhalt des vierten Kapitels ist das Lambda-Nukleon-System. Hier werden zunächst die in der Streuung zusätzlich berücksichtigten Σ -Boxen besprochen. Im weiteren werden die R-Matrixgleichung eingeführt, der Zusammenhang der on-shell-R-Matrixelemente mit den Streuphasen behandelt und auf die numerische Lösungsmethode dieser Integralgleichung eingegangen.

Das fünfte und letzte Kapitel enthält die Resultate und deren Diskussionen.

2. Ein-Boson-Austauschpotentiale

2.1 Allgemeine Erläuterungen

Im Ein-Boson-Austauschmodell der starken Wechselwirkung sind die Potentiale gegeben durch eine Summe von Meson-Austausch-Diagrammen (Übergangsmatrixelemente) (BD66). In Fig. 1 ist ein entsprechendes Austausch-Diagramm dargestellt.

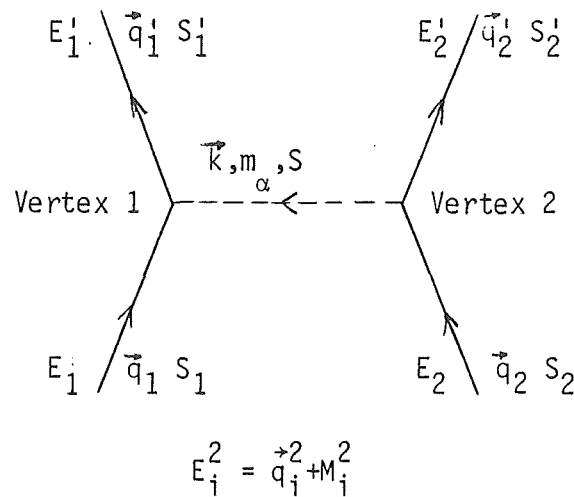
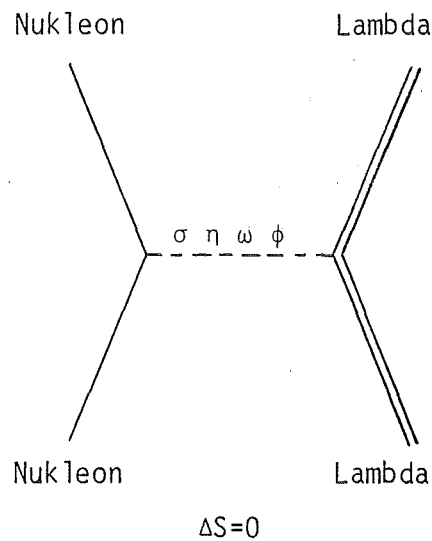


Fig. 1: Ein-Boson-Austauschgraph

In Fig. 1 bedeuten \vec{q}_1, E_1, M_1, S_1 bzw. \vec{q}_2, E_2, M_2, S_2 die Impulse, Energien, Massen und Spins der beiden einlaufenden Teilchen; $\vec{q}_1', E_1', M_1', S_1'$ bzw. $\vec{q}_2', E_2', M_2', S_2'$ die entsprechenden Größen der beiden auslaufenden Teilchen. Der Impuls, die Masse und der Spin des virtuellen Mesons sind mit \vec{k}, m_α, S bezeichnet. Die Mesonenergie ist $\omega_\alpha = \sqrt{\vec{k}^2 + m_\alpha^2}$.

Im Falle der Lambda-Nukleon-Wechselwirkung gibt es zwei charakteristische Graphen:

a) Direkter Graph



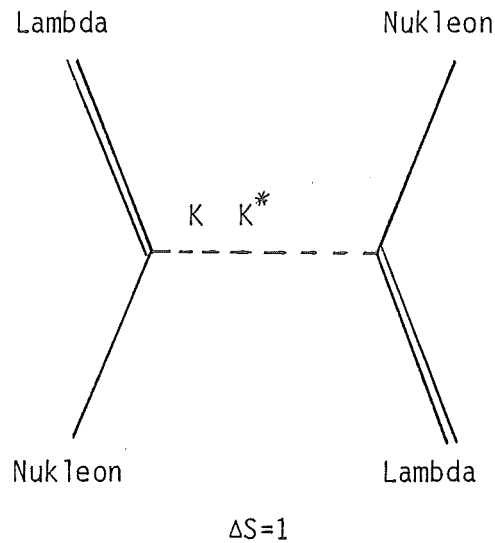
Da das Lambda-Teilchen ein Isospin-Singulett ist, können zu diesem Graphen nur Isospin-0-Mesonen beitragen. Außerdem wird in diesem Graphen keine Strangeness ausgetauscht, d.h. die ausgetauschten Mesonen müssen die Strangeness-Quantenzahl $S=0$ besitzen.

In den folgenden Rechnungen werden Beiträge berücksichtigt von dem effektiven (skalaren) $J^P = 0^+$ σ -Meson, dem (pseudoskalaren) $J^P = 0^-$ η -Meson und den beiden (vektor) $J^P = 1^-$ ω -, ϕ -Mesonen.

Es soll in diesem Zusammenhang hervorgehoben werden, daß der Austausch des leichten 0^- π -Mesons in der Lambda-Nukleon Wechselwirkung nicht möglich ist, da das Pion ein Isospintriplett ist. In der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung spielt das Pion dagegen eine bedeutende Rolle, es ist verantwortlich für den langreichweitigen Bereich des NN-Potentials.

Die Tatsache, daß es in der ΛN -Wechselwirkung kein dem Pion vergleichbar leichtes Meson gibt, bedeutet eine wesentlich kürzere Reichweite des ΛN -Potentials.

b) Austauschgraph



In diesem Graphen sind die beiden auslaufenden Teilchen ausgetauscht. Die Teilchen ändern ihre Strangeness und auch ihren Isospin, d.h. zu diesem Graphen können nur Isospin $1/2$ Mesonen mit der Strangeness $S = 1$ beitragen. Es sind dies die 0^- -K-Mesonen und die 1^- - K^* -Mesonen.

Der Ausgangspunkt zur analytischen Berechnung der Ein-Boson-Austauschpotentiale sind die Lagrangedichten an den beiden Vertices 1 und 2. Die 0^{+-} , 0^- - und 1^- -Kopplungen zwischen den Baryon- und Mesonfeldern werden dabei dargestellt durch Kombinationen aus den Diracschen γ -Matrizen, die das entsprechende Transformationsverhalten zeigen.

Es ist üblich (ERK74), die folgenden Lagrangedichten zu verwenden:

$$\text{skalare Kopplung: } \mathcal{L}_s = \sqrt{4\pi} g_s \bar{\psi} \psi \phi^{(s)} \quad (2.1)$$

$$\text{pseudoskalare Kopplung: } \mathcal{L}_{ps} = \sqrt{4\pi} g_{ps} \bar{\psi} i \gamma^5 \psi \phi^{(ps)} \quad (2.2)$$

Vektor-Kopplung:

$$\mathcal{L}_V = \sqrt{4\pi} g_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \phi_\mu^{(V)} + \sqrt{4\pi} \frac{f_V}{4\mu} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi (\partial_\mu \phi_\nu^{(V)} - \partial_\nu \phi_\mu^{(V)}) \quad (2.3)$$

μ = Normierungsmasse, üblicherweise die Nukleonmasse

Hier bezeichnet ψ den Baryonfeldoperator, $\bar{\psi}$ den zu ψ adjungierten, $\phi^{(\alpha)}$ ($\alpha = s, ps, v$) beschreibt das Mesonfeld. Die hier verwendete Darstellung der Dirac-Matrizen ist im Anhang 1 angegeben.

Aus den genannten Lagrangedichten erhält man durch Integration über den gesamten Raum die Hamiltonoperatoren an den Vertices. Eine ausführliche Darstellung dieser Rechnungen findet man z.B. in (KOT74).

Das zu Fig. 1 gehörende Übergangsmatrixelement ist im C.M. System* gegeben durch (ERK74, KOT74)

$$\langle s_1' s_2' | V_2(\vec{q}', \vec{q}) | s_1 s_2 \rangle = \bar{u}(\vec{q}', s_1') \Gamma_\alpha^{(1)} u(\vec{q}, s_1) P_\alpha \bar{u}(-\vec{q}', s_2') \Gamma_\alpha^{(2)} u(-\vec{q}, s_2) \quad (2.4)$$

Die Dirac-Spinoren $u(\vec{q}, s)$ sind im Anhang 1 definiert. Die Kopplungen an den Vertices lauten:

skalar: $\Gamma_s = 1$ (2.5a)

pseudoskalar: $\Gamma_{ps} = i\gamma_5$ (2.5b)

vektor: $\Gamma_V = g\gamma_\mu + \frac{if}{2\mu} \sigma_{\mu\rho} (q'^\rho - q^\rho)$ (2.5c)

* Im CMS: $\vec{q}_1 = \vec{q}$; $\vec{q}_2 = -\vec{q}$
 $\vec{q}_1' = \vec{q}'$; $\vec{q}_2' = -\vec{q}'$

Die Propagatoren P_α sind:

$$\text{skalar:} \quad P_s = \frac{1}{2\omega_s} \left(\frac{1}{E_1 - E_1' - \omega_s} + \frac{1}{E_2 - E_2' - \omega_s} \right) \quad (2.6a)$$

$$\text{pseudoskalar:} \quad P_{ps} = \frac{1}{2\omega_{ps}} \left(\frac{1}{E_1 - E_1' - \omega_{ps}} + \frac{1}{E_2 - E_2' - \omega_{ps}} \right) \quad (2.6b)$$

$$\text{vektor:} \quad P_v = \frac{-g_{\mu\nu}}{2\omega_v} \left(\frac{1}{E_1 - E_1' - \omega_v} + \frac{1}{E_2 - E_2' - \omega_v} \right) * \quad (2.6c)$$

2.2 OBEs in der Helizitätsdarstellung

Die Berechnung der Ein-Boson-Austauschpotentiale erfolgt in der Helizitätsdarstellung, d.h. für die Dirac-Spinoren $u(\vec{q}, s)$ wird folgende Darstellung benutzt:

$$|u_\lambda(\vec{q})\rangle = \left(\frac{\epsilon}{2M}\right)^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2\lambda q}{\epsilon} \end{pmatrix} |\lambda\rangle \quad (2.7)$$

mit $\epsilon = E_q + M$; $E_q^2 = \vec{q}^2 + M^2$.

Die Spinoren $|\lambda\rangle$ sind Eigenzustände des Helizitätsoperators

$$\frac{\vec{s} \cdot \vec{q}}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{q} \quad \text{zu den Eigenwerten } \lambda = \pm \frac{1}{2}$$

Der Zusammenhang zwischen den Helizitätsspinoren $|\lambda\rangle$ und den üblichen Pauli-Spinoren $|x\rangle$ im CMS ist gegeben durch (vgl. Fig. 2):

* Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

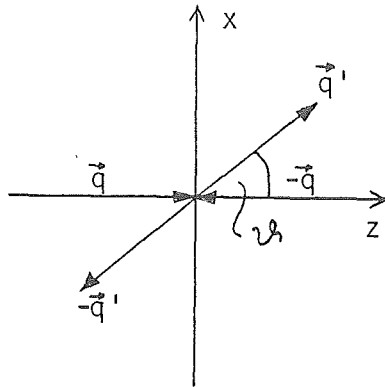


Fig. 2: Zwei-Teilchen-Streuung im CMS. ϑ : Streuwinkel

$$|\lambda_1\rangle = |x_{\lambda_1}\rangle ; |\lambda_2\rangle = |x_{-\lambda_2}\rangle$$

$$|\lambda_1'\rangle = \exp(-\frac{1}{2} i \sigma_y) |x_{\lambda_1}\rangle \quad (2.8)$$

$$|\lambda_2'\rangle = \exp(-\frac{1}{2} i \sigma_y) |x_{-\lambda_2}\rangle$$

Dabei sind die $|x_{\lambda_i}\rangle$ definiert durch:

$$\frac{1}{2} \sigma_z |x_{\lambda_i}\rangle = \lambda_i |x_i\rangle \quad (2.9)$$

Mit den Dirac-Spinoren (2.7) lassen sich nun die Übergangsmatrixelemente berechnen. Die in den Formeln auftretenden Größen finden ihre Erklärung in Fig. 3.

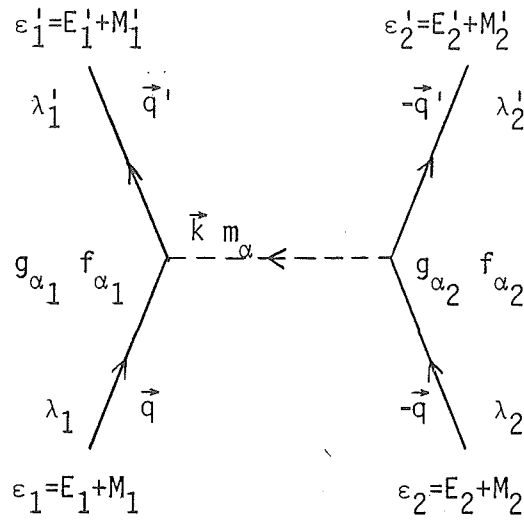


Fig. 3: Zur Erläuterung der Formeln

Für die skalare Kopplung (2.5a) erhält man

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_s(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= 4\pi g_{s1} g_{s2} P_s \left(\frac{\epsilon'_1 \epsilon'_2 \epsilon_1 \epsilon_2}{16 M'_1 M'_2 M_1 M_2} \right)^{1/2} \\ &\times \left(1 - \frac{4\lambda'_1 \lambda_1 q' q}{\epsilon'_1 \epsilon_1} \right) \left(1 - \frac{4\lambda'_2 \lambda_2 q' q}{\epsilon'_2 \epsilon_2} \right) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

und für die pseudoskalare Kopplung (2.5b)

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V_{ps}(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= -4\pi g_{ps1} g_{ps2} P_{ps} \left(\frac{\epsilon'_1 \epsilon'_2 \epsilon_1 \epsilon_2}{16 M'_1 M'_2 M_1 M_2} \right)^{1/2} \\ &\times 4 \left(\frac{\lambda'_1 q'}{\epsilon'_1} - \frac{\lambda_1 q}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{\lambda'_2 q'}{\epsilon'_2} - \frac{\lambda_2 q}{\epsilon_2} \right) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die Berechnung des Matrixelements für die Vektorkopplung (2.5c) ist etwas aufwendiger. Der Ausdruck

$$\bar{u}_{\lambda'_1}(\vec{q}') [g_{v_1} \gamma_\mu + \frac{if_{v_1}}{2\mu} \sigma_{\mu\rho} (q'_1{}^\rho - q_1{}^\rho)] u_{\lambda_1}(\vec{q})$$

$$\times P_V \bar{u}_{\lambda'_2}(-\vec{q}') [g_{v_2} \gamma_\nu + \frac{if_{v_2}}{2\mu} \sigma_{\nu\tau} (q'_2{}^\tau - q_2{}^\tau)] u_{\lambda_2}(-\vec{q})$$

läßt sich mit Hilfe der Gordon-Zerlegung (s. Anhang 1) in vier Terme aufspalten:

$$\frac{-1}{2\omega_V} \left(\frac{1}{E_1 - E'_1 - \omega_V} + \frac{1}{E_2 - E'_2 - \omega_V} \right) \left\{ (g_{v_1} + \frac{M_1 + M'_1}{2\mu} f_{v_1}) (g_{v_2} + \frac{M_2 + M'_2}{2\mu} f_{v_2}) [\bar{u}_{\lambda'_1} \gamma_\mu u_{\lambda_1} \bar{u}_{\lambda'_2} \gamma^\mu u_{\lambda_2}] \right.$$

$$- (g_{v_1} + \frac{M_1 + M'_1}{2\mu} f_{v_1}) \frac{f_{v_2}}{2\mu} [\bar{u}_{\lambda'_1} \gamma_\mu u_{\lambda_1} \bar{u}_{\lambda'_2} (q_2 + q'_2)^\mu u_{\lambda_2}]$$

$$- (g_{v_2} + \frac{M_2 + M'_2}{2\mu} f_{v_2}) \frac{f_{v_1}}{2\mu} [\bar{u}_{\lambda'_1} (q_1 + q'_1)_\mu u_{\lambda_1} \bar{u}_{\lambda'_2} \gamma^\mu u_{\lambda_2}]$$

$$+ \frac{f_{v_1} f_{v_2}}{4\mu^2} [\bar{u}_{\lambda'_1} (q_1 + q'_1)_\mu u_{\lambda_1} \bar{u}_{\lambda'_2} (q_2 + q'_2)^\mu u_{\lambda_2}]$$

Mit

$$\bar{u}(1') \gamma_\mu u(1) \bar{u}(2') \gamma^\mu u(2)$$

$$= \left(\frac{\epsilon'_1 \epsilon'_2 \epsilon_1 \epsilon_2}{16 M'_1 M'_2 M_1 M_2} \right)^{1/2} \left[\left(1 + \frac{4 \lambda'_1 \lambda_1 q' q}{\epsilon'_1 \epsilon_1} \right) \left(1 + \frac{4 \lambda'_2 \lambda_2 q' q}{\epsilon'_2 \epsilon_2} \right) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \right.$$

$$\left. - 4 \left(\frac{\lambda_1 q}{\epsilon_1} + \frac{\lambda'_1 q'}{\epsilon'_1} \right) \left(\frac{\lambda_2 q}{\epsilon_2} + \frac{\lambda'_2 q'}{\epsilon'_2} \right) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \right],$$

$$\bar{u}(1') \gamma_\mu u(1) \bar{u}(2') (q_2 + q'_2)^\mu u(2)$$

$$= \left(\frac{\epsilon'_1 \epsilon'_2 \epsilon_1 \epsilon_2}{16 M'_1 M'_2 M_1 M_2} \right)^{1/2} \left[(E'_2 + E_2) \left(1 + \frac{4 \lambda'_1 \lambda_1 q' q}{\epsilon'_1 \epsilon_1} \right) \left(1 - \frac{4 \lambda'_2 \lambda_2 q' q}{\epsilon'_2 \epsilon_2} \right) \right.$$

$$\left. + (2 \lambda_1 q + 2 \lambda'_1 q') \left(1 - \frac{4 \lambda'_2 \lambda_2 q' q}{\epsilon'_2 \epsilon_2} \right) \left(\frac{2 \lambda_1 q}{\epsilon_1} + \frac{2 \lambda'_1 q'}{\epsilon'_1} \right) \right] \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle,$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}(1')(q_1+q_1')_{\mu} u(1) \bar{u}(2')\gamma^{\mu} u(2) \\
 &= \left(\frac{\epsilon_1' \epsilon_2' \epsilon_1 \epsilon_2}{16 M_1' M_2' M_1 M_2} \right)^{1/2} \left[(E_1' + E_1) \left(1 + \frac{4 \lambda_2' \lambda_2 q' q}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \left(1 - \frac{4 \lambda_1' \lambda_1 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_1} \right) \right. \\
 & \quad \left. + (2 \lambda_2 q + 2 \lambda_2' q') \left(1 - \frac{4 \lambda_1' \lambda_1 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_1} \right) \left(\frac{2 \lambda_2 q}{\epsilon_2} + \frac{2 \lambda_2' q'}{\epsilon_2'} \right) \right] \langle \lambda_1' \lambda_2' | \lambda_1 \lambda_2 \rangle
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}(1')(q_1+q_1')_{\mu} u(1) \bar{u}(2')(q_2+q_2')^{\mu} u(2) \\
 &= \left(\frac{\epsilon_1' \epsilon_2' \epsilon_1 \epsilon_2}{16 M_1' M_2' M_1 M_2} \right)^{1/2} \left[((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + (\vec{q} + \vec{q}')^2) \right. \\
 & \quad \left. \times \left(1 - \frac{4 \lambda_1' \lambda_1 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_1} \right) \left(1 - \frac{4 \lambda_2' \lambda_2 q' q}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \right] \langle \lambda_1' \lambda_2' | \lambda_1 \lambda_2 \rangle
 \end{aligned}$$

erhält man für die Vektorkopplung folgendes Resultat:

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_1' \lambda_2' | V_V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \left(\frac{\epsilon_1' \epsilon_1 \epsilon_2' \epsilon_2}{16 M_1' M_1 M_2' M_2} \right)^{1/2} \frac{-1}{2 \omega_V} \left(\frac{1}{E_1 - E_1' - \omega_V} + \frac{1}{E_2 - E_2' - \omega_V} \right) \\
 &\times \{ G_{V_1} G_{V_2} \left[\left(1 + \frac{4 \lambda_1' \lambda_1 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_1} \right) \left(1 + \frac{4 \lambda_2' \lambda_2 q' q}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \langle \lambda_1' \lambda_2' | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \right. \\
 &\quad \left. - 4 \left(\frac{\lambda_1 q}{\epsilon_1} + \frac{\lambda_1' q'}{\epsilon_1'} \right) \left(\frac{\lambda_2 q}{\epsilon_2} + \frac{\lambda_2' q'}{\epsilon_2'} \right) \langle \lambda_1' \lambda_2' | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \right] \\
 &\quad - \frac{G_{V_1}^f G_{V_2}}{2 \mu} \left[((E_2' + E_2) \left(1 + \frac{4 \lambda_1' \lambda_1 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_1} \right) + 4(\lambda_1 q + \lambda_1' q') \left(\frac{\lambda_1 q}{\epsilon_1} + \frac{\lambda_1' q'}{\epsilon_1'} \right)) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 - \frac{4 \lambda_2' \lambda_2 q' q}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \langle \lambda_1' \lambda_2' | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{G_{v_2} f_{v_1}}{2\mu} \left[((E_1' + E_1)(1 + \frac{4\lambda_2' \lambda_2 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_2}) + 4(\lambda_2 q + \lambda_2' q')(\frac{\lambda_2 q}{\epsilon_2} + \frac{\lambda_2' q'}{\epsilon_2'})) \right. \\
 & \times (1 - \frac{4\lambda_1' \lambda_1 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_1}) \langle \lambda_1' \lambda_2' | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \Big] \\
 & + \frac{f_{v_1} f_{v_2}}{4\mu^2} \left[(1 - \frac{4\lambda_1' \lambda_1 q' q}{\epsilon_1' \epsilon_1})(1 - \frac{4\lambda_2' \lambda_2 q' q}{\epsilon_2' \epsilon_2}) \right. \\
 & \times ((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + (\vec{q} + \vec{q}')^2) \langle \lambda_1' \lambda_2' | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \Big] \Big\} \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Abkürzung:

$$G_{v_i} = g_{v_i} + \frac{M_i' + M_i}{2\mu} f_{v_i}$$

Die in den Gl. (2.10)-(2.12) vorkommenden Helizitätsmatrixelemente sind im Anhang 1 berechnet. Es ist (EAH71):

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_1' \lambda_2' | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \{ |\lambda_1' + \lambda_1| \cos \frac{\vartheta}{2} + (\lambda_1' - \lambda_1) \sin \frac{\vartheta}{2} \} \\
 &\times \{ |\lambda_2' + \lambda_2| \cos \frac{\vartheta}{2} - (\lambda_2' - \lambda_2) \sin \frac{\vartheta}{2} \} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_1' \lambda_2' | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= - \{ (\lambda_1' + \lambda_1) \sin \frac{\vartheta}{2} + |\lambda_1' - \lambda_1| \cos \frac{\vartheta}{2} \} \\
 &\times \{ (\lambda_2' + \lambda_2) \sin \frac{\vartheta}{2} - |\lambda_2' - \lambda_2| \cos \frac{\vartheta}{2} \} \\
 &- \{ |\lambda_1' + \lambda_1| \sin \frac{\vartheta}{2} - (\lambda_1' - \lambda_1) \cos \frac{\vartheta}{2} \} \{ |\lambda_2' + \lambda_2| \sin \frac{\vartheta}{2} + (\lambda_2' - \lambda_2) \cos \frac{\vartheta}{2} \} \\
 &- \{ (\lambda_1' + \lambda_1) \cos \frac{\vartheta}{2} - |\lambda_1' - \lambda_1| \sin \frac{\vartheta}{2} \} \{ (\lambda_2' + \lambda_2) \cos \frac{\vartheta}{2} + |\lambda_2' - \lambda_2| \sin \frac{\vartheta}{2} \} \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

2.2.1 Partialwellenzerlegung der OBEs

Unter der Voraussetzung, daß die Wechselwirkung für alle beitragenden Mesonen rotationsinvariant ist, lassen sich die Potentialmatrixelemente in der Basis der Gesamtdrehimpulseigenfunktionen entwickeln. Wählt man die Einfallsrichtung \vec{q} als z-Achse, dann ist der Streuwinkel identisch mit dem Polarwinkel und die Entwicklung lautet (ERK74):

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (2.15)$$

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 ; \lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$$

Die $d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta)$ sind die reduzierten Rotationmatrizen. Sie haben die Eigenschaft:

$$d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) = d_{-\lambda', -\lambda}^J(\vartheta) = (-)^{\lambda-\lambda'} d_{\lambda', \lambda}^J(\vartheta) \quad (2.16)$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation

$$\int d(\cos\vartheta) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) d_{\lambda\lambda'}^{J'}(\vartheta) = \frac{2}{2J+1} \delta_{JJ'} \quad (2.17)$$

läßt sich (2.15) invertieren und man erhält die Helizitätsmatrixelemente der Partialwellen:

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (2.18)$$

Die V^J -Matrixelemente besitzen folgende Invarianzeigenschaft:

$$\text{Paritätserhaltung: } \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle -\lambda'_1 -\lambda'_2 | V^J | -\lambda_1 -\lambda_2 \rangle \quad (2.19)$$

An dieser Stelle soll kurz auf einen Unterschied zwischen der ΛN - und NN -Wechselwirkung hingewiesen werden. Im NN Fall erhält man die zusätzliche Symmetrierelation:

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda'_2 \lambda'_1 | V^J | \lambda_2 \lambda_1 \rangle ,$$

die die Erhaltung des Gesamtspins ausdrückt (ERK74). Diese Vertauschung der Helizitäten ist in den NN -OBEPs nur möglich, da es sich bei allen vier Teilchen um Nukleonen handelt, die die gleiche Masse besitzen.

In den hier zu behandelnden ΛN -OBEPs gilt diese Symmetrie wegen der verschiedenen Massen nicht. Dies bedeutet gleichzeitig, daß in der ΛN -Wechselwirkung der Gesamtspin keine Erhaltungsgröße mehr ist, d.h. es sind Singulett-Triplett-Übergänge erlaubt. Besonders deutlich wird diese Eigenschaft der ΛN -OBEPs, wenn man sie in der Pauli-Darstellung angibt. Es tritt dort ein zusätzlicher Potentialoperator (antisymmetrischer Spin-Orbit-Term) auf, der zwischen den Pauli-Spinoren nur nichtdiagonale Elemente hat (vgl. Kap. 2.3, Gl. (2.61)). Die Gl. (2.19) reduziert die Zahl der 16 linear unabhängigen Matrixelemente auf 8.

Gewählt werden die Kombinationen:

$$\begin{aligned} V_1^J &= \langle ++ | V^J(q', q) | ++ \rangle & V_5^J &= \langle ++ | V^J(q', q) | +- \rangle \\ V_2^J &= \langle ++ | V^J(q', q) | -- \rangle & V_6^J &= \langle +- | V^J(q', q) | ++ \rangle \\ V_3^J &= \langle +- | V^J(q', q) | +- \rangle & V_7^J &= \langle ++ | V^J(q', q) | -+ \rangle \\ V_4^J &= \langle +- | V^J(q', q) | -+ \rangle & V_8^J &= \langle -+ | V^J(q', q) | ++ \rangle \end{aligned} \quad (2.20)$$

Hier sind die Helizitätseigenwerte $\lambda = \pm 1/2$ mit \pm bezeichnet und die $V_1^J(q',q)$ mit V_1^J .

Zur Behandlung des Lambda-Nukleon-Systems, insbesondere zur Lösung der Streugleichung, werden die Amplituden (2.20) nicht in dieser Form verwendet. Es werden aus ihnen acht neue Linearkombinationen gebildet:

$$\begin{aligned}
 0_V^J &= V_1^J - V_2^J & 12_V^J &= V_1^J + V_2^J \\
 1_V^J &= V_3^J - V_4^J & 34_V^J &= V_3^J + V_4^J \\
 2_V^J &= V_5^J - V_7^J & 57_V^J &= V_5^J + V_7^J \\
 3_V^J &= V_6^J - V_8^J & 68_V^J &= V_6^J + V_8^J
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Der Grund dafür ist eine Vereinfachung in den Kopplungen der Streugleichungen untereinander (s. Kap. 4.2).

Bis hierhin ist die Darstellung des Formalismus zur Berechnung der V^J -Matrixelemente im wesentlichen abgeschlossen. Zur expliziten Angabe müssen zunächst die Helizitätskombinationen (2.20) in die Ausdrücke (2.10)-(2.12) eingesetzt werden. Anschließend sind nach (2.21) die Linearkombinationen zu bilden und diese mit den entsprechenden d-Funktionen zu multiplizieren.

Bevor diese Schritte im einzelnen durchgeführt werden, sollen die Matrixelemente der in den Gl. (2.10)-(2.12) auftauchenden Helizitätsmatrizen $\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ und $\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ angegeben werden. Sie ergeben sich durch einfaches Einsetzen in (2.13) und (2.14).

$$\begin{aligned}
 \langle ++|++ \rangle &= \frac{1}{2} (1+\cos\vartheta) \\
 \langle ++|-- \rangle &= -\frac{1}{2} (1-\cos\vartheta) \\
 \langle +-|+- \rangle &= \frac{1}{2} (1+\cos\vartheta) \\
 \langle +-|-+ \rangle &= \frac{1}{2} (1-\cos\vartheta) \\
 \langle ++|+- \rangle &= -\frac{1}{2} \sin\vartheta \\
 \langle +-|++ \rangle &= \frac{1}{2} \sin\vartheta \\
 \langle ++|-+ \rangle &= \frac{1}{2} \sin\vartheta \\
 \langle -+|++ \rangle &= -\frac{1}{2} \sin\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
 \langle ++|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |++ \rangle &= -1 - \frac{1}{2} (1-\cos\vartheta) \\
 \langle ++|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |-- \rangle &= 1 + \frac{1}{2} (1+\cos\vartheta) \\
 \langle +-|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |+- \rangle &= \frac{1}{2} (1+\cos\vartheta) \\
 \langle +-|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |-+ \rangle &= \frac{1}{2} (1-\cos\vartheta) \\
 \langle ++|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |+- \rangle &= -\frac{1}{2} \sin\vartheta \\
 \langle +-|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |++ \rangle &= \frac{1}{2} \sin\vartheta \\
 \langle ++|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |-+ \rangle &= \frac{1}{2} \sin\vartheta \\
 \langle -+|\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 |++ \rangle &= -\frac{1}{2} \sin\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Um die Integration über den Streuwinkel ϑ in Gl. (2.18) numerisch durchführen zu können, werden die reduzierten Rotationsmatrizen $d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta)$ durch die gewöhnlichen Legendrepolynome $P_J(\cos\vartheta)$ ausgedrückt. Dazu benötigt man folgende Relationen:

$$d_{00}^J = P_J$$

$$(1+\cos\vartheta)d_{11}^J = P_J + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}$$

$$(1-\cos\vartheta)d_{-11}^J = -P_J + \frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1}$$

$$\sin\vartheta d_{10}^J = -\sin\vartheta d_{01}^J = \frac{(J(J+1))^{1/2}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \tag{2.24}$$

$$\sin\vartheta d_{-10}^J = \sin\vartheta d_{01}^J$$

$$\sin\vartheta d_{0-1}^J = \sin\vartheta d_{10}^J$$

Darüber hinaus werden noch folgende Beziehungen zwischen den Helizitätsamplituden benötigt, die sich aus den Symmetrieeigenschaften der d-Funktionen ergeben.

Sei

$$D^k V^J := d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle \lambda_1' \lambda_2' | V(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (k=0,1,2,3,12,34,57,68) \quad (2.25)$$

eine abkürzende Schreibweise für den Integranden aus Gl. (2.18). Dann gilt:

$$D^2 V^J = d_{10}^J \langle ++ | V | +- \rangle - d_{-10}^J \langle ++ | V | -+ \rangle$$

Die Potentialmatrixelemente sind proportional zu $\sin\vartheta$, vgl. (2.22) und (2.23), d.h.

$$\begin{aligned} D^2 V^J &= d_{10}^J \cdot A \cdot \sin\vartheta - d_{-10}^J \cdot B \cdot \sin\vartheta = (d_{10}^J A - d_{-10}^J B) \sin\vartheta \\ &= (d_{10}^J A - d_{01}^J B) \sin\vartheta = (d_{10}^J A + d_{10}^J B) \sin\vartheta \\ &= d_{10}^J (A \sin\vartheta + B \sin\vartheta) = d_{10}^J (\langle ++ | V | +- \rangle + \langle ++ | V | -+ \rangle) \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$D^2 V^J = d_{10}^J(\vartheta) \cdot 57_V$$

Ganz analog zeigt man:

$$\begin{aligned}
 D^{57}V^J &= d_{10}^J(\vartheta) \quad 2_V \\
 D^3V^J &= d_{01}^J(\vartheta) \quad 68_V \\
 D^{68}V^J &= d_{01}^J(\vartheta) \quad 3_V
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Nach diesen Vorbereitungen können nun die Partialwellen der Potentiale nach (2.18) numerisch berechnet werden.

Wir geben im folgenden die Entwicklungen der Integranden

$$d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle \lambda_1' \lambda_2' | V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

nach Legendre-Polynomen an.

Es wird wieder die Schreibweise (2.25) benutzt und außerdem der in allen Partialwellen auftretende Faktor zusammen mit den Propagatoren

$$4\pi \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_1' \epsilon_2'}{16 M_1 M_2 M_1' M_2'} \right)^{1/2} \frac{1}{2\omega_\alpha} \left(\frac{1}{E_1 - E_1' - \omega_\alpha} + \frac{1}{E_2 - E_2' - \omega_\alpha} \right) =: K_\alpha \quad \alpha = s, ps, v \tag{2.27}$$

mit K_α abgekürzt.

Skalares Meson:

$$\begin{aligned}
 D^0V^J &= K_S g_1 g_2 \left[\left\{ 1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right\} P_J - \left\{ qq' \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \right\} \cos \vartheta P_J \right] \\
 D^{12}V^J &= K_S g_1 g_2 \left[\left\{ -q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \right\} P_J + \left\{ 1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right\} \cos \vartheta P_J \right] \\
 D^1V^J &= K_S g_1 g_2 \left[\left\{ 1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right\} P_J \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \right\} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{34}V^J &= K_S g_1 g_2 \left[\left\{ -q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \right\} P_J \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right\} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right) \right] \\
 D^2V^J &= K_S g_1 g_2 \left\{ q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 D^{57}V^J &= - K_S g_1 g_2 \left\{ 1 - \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 D^3V^J &= K_S g_1 g_2 \left\{ q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_2} \right) \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 D^{68}V^J &= - K_S g_1 g_2 \left\{ 1 - \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{2J+1} \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Pseudoskalares Meson:

$$\begin{aligned}
 D^0V^J &= -K_{ps} g_1 g_2 \left[\left\{ \frac{E_1' - M_1'}{\epsilon_2'} + \frac{E_1 - M_1}{\epsilon_2} \right\} P_J - \left\{ q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_1} \right) \right\} \cos \vartheta P_J \right] \\
 D^{12}V^J &= - K_{ps} g_1 g_2 \left[\left\{ -q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_1} \right) \right\} P_J + \left\{ \frac{E_1' - M_1'}{\epsilon_2'} + \frac{E_1 - M_1}{\epsilon_2} \right\} \cos \vartheta P_J \right] \\
 D^1V^J &= K_{ps} g_1 g_2 \left[\left\{ \frac{E_1' - M_1'}{\epsilon_2'} + \frac{E_1 - M_1}{\epsilon_2} \right\} P_J \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_1} \right) \right\} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right) \right] \\
 D^{34}V^J &= K_{ps} g_1 g_2 \left[\left\{ -q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_1} \right) \right\} P_J \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{E_1' - M_1'}{\epsilon_2'} + \frac{E_1 - M_1}{\epsilon_2} \right\} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right) \right] \\
 D^2V^J &= K_{ps} g_1 g_2 \left\{ q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_1} \right) \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{57}V^J &= K_{ps} g_1 g_2 \left\{ \frac{E_1' - M_1'}{\epsilon_2'} - \frac{E_1 - M_1}{\epsilon_2} \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 D^{3}V^J &= - K_{ps} g_1 g_2 \left\{ q'q \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_2' \epsilon_1} \right) \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 D^{68}V^J &= - K_{ps} g_1 g_2 \left\{ \frac{E_1' - M_1'}{\epsilon_2'} - \frac{E_1 - M_1}{\epsilon_2} \right\} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die entsprechenden Ergebnisse für die Vektormesonen werden in einer abkürzten Schreibweise angegeben. Die in den Formeln auftretenden F-Koeffizienten findet man im Anhang 2.

Vektor-Meson:

$$\begin{aligned}
 D^0V^J &= - K_V \{ g_1 g_2 [{}^0F_{g_1 g_2}^I P_J + {}^0F_{g_1 g_2}^{II} \cos \vartheta P_J] \\
 &\quad + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 [{}^0F_{g_1 f_2}^I P_J + {}^0F_{g_1 f_2}^{II} \cos \vartheta P_J] \\
 &\quad + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 [{}^0F_{g_2 f_1}^I P_J + {}^0F_{g_2 f_1}^{II} \cos \vartheta P_J] \\
 &\quad + \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 [{}^0F_{f_1 f_2}^I P_J + {}^0F_{f_1 f_2}^{II} \cos \vartheta P_J + {}^0F_{f_1 f_2}^{III} \cos^2 \vartheta P_J] \} \\
 D^{12}V^J &= - K_V \{ g_1 g_2 [{}^{12}F_{g_1 g_2}^I P_J + {}^{12}F_{g_1 g_2}^{II} \cos \vartheta P_J] \\
 &\quad + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 [{}^{12}F_{g_1 f_2}^I P_J + {}^{12}F_{g_1 f_2}^{II} \cos \vartheta P_J] \\
 &\quad + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 [{}^{12}F_{g_2 f_1}^I P_J + {}^{12}F_{g_2 f_1}^{II} \cos \vartheta P_J] \\
 &\quad + \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 [{}^{12}F_{f_1 f_2}^I P_J + {}^{12}F_{f_1 f_2}^{II} \cos \vartheta P_J + {}^{12}F_{f_1 f_2}^{III} \cos^2 \vartheta P_J] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^1 V^J = & - K_V \{ g_1 g_2 [{}^1F_{g_1 g_2}^I P_J + {}^1F_{g_1 g_2}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \\
 & + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 [{}^1F_{g_1 f_2}^I P_J + {}^1F_{g_1 f_2}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \\
 & + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 [{}^1F_{g_2 f_1}^I P_J + {}^1F_{g_2 f_1}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \\
 & + \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 [{}^1F_{f_1 f_2}^I P_J + {}^1F_{f_1 f_2}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right) \\
 & + {}^1F_{f_1 f_2}^{III} \cos \chi P_J + {}^1F_{f_1 f_2}^{IV} \cos \chi \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^{34} V^J = & - K_V \{ g_1 g_2 [{}^{34}F_{g_1 g_2}^I P_J + {}^{34}F_{g_1 g_2}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \\
 & + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 [{}^{34}F_{g_1 f_2}^I P_J + {}^{34}F_{g_1 f_2}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \\
 & + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 [{}^{34}F_{g_2 f_1}^I P_J + {}^{34}F_{g_2 f_1}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \\
 & + \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 [{}^{34}F_{f_1 f_2}^I P_J + {}^{34}F_{f_1 f_2}^{II} \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right) \\
 & + {}^{34}F_{f_1 f_2}^{III} \cos \chi P_J + {}^{34}F_{f_1 f_2}^{IV} \cos \chi \left(\frac{J+1}{2J+1} P_{J-1} + \frac{J}{2J+1} P_{J+1} \right)] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D^2 V^J = & - K_V \{ g_1 g_2 {}^2F_{g_1 g_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 & + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 {}^2F_{g_1 f_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 & + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 {}^2F_{g_2 f_1} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 \left({}^2F_{f_1 f_2}^I \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \right. \\ \left. + {}^2F_{f_1 f_2}^{II} \cos\gamma \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \right) \}$$

$$D^{57VJ} = - K_V \{ g_1 g_2 {}^{57}F_{g_1 g_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 {}^{57}F_{g_1 f_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 {}^{57}F_{g_2 f_1} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 ({}^{57}F_{f_1 f_2}^I \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + {}^{57}F_{f_1 f_2}^{II} \cos\gamma \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})) \}$$

$$D^{3VJ} = - K_V \{ g_1 g_2 {}^3F_{g_1 g_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 {}^3F_{g_1 f_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 {}^3F_{g_2 f_1} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 ({}^3F_{f_1 f_2}^I \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + {}^3F_{f_1 f_2}^{II} \cos\gamma \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})) \}$$

$$D^{68VJ} = - K_V \{ g_1 g_2 {}^{68}F_{g_1 g_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\ + \frac{1}{2\mu} g_1 f_2 {}^{68}F_{g_1 f_2} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\mu} g_2 f_1 {}^{68}F_{g_2 f_1} \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 & + \frac{1}{4\mu^2} f_1 f_2 ({}^{68}F_{f_1 f_2}^I \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1}) \\
 & + {}^{68}F_{f_1 f_2}^{II} \cos\vartheta \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} (P_{J+1} - P_{J-1})) \}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

2.2.2 Formfaktoren

Die Feldoperatoren in den Lagrangedichten beschreiben die Teilchen als punktförmige Objekte, deren Struktur nur durch Masse, Spin und Isospin bestimmt ist. Mathematisch äußert sich diese Annahme darin, daß die Potentiale nicht schnell genug gegen Null konvergieren. Diese Konvergenz ist aber eine Voraussetzung für die Lösbarkeit der Streu-Integralgleichung. Um diese Voraussetzung zu erfüllen und gleichzeitig die endliche Ausdehnung der beteiligten Teilchen zu berücksichtigen, werden die Potentiale mit Formfaktoren multipliziert.

Es wurde für die Rechnungen ein Monopol-Formfaktor verwendet:

$$F(\cos\vartheta) = \left(\frac{M_{\text{cut}}^2 - m_\alpha^2}{k^2 + M_{\text{cut}}^2} \right), \quad \alpha = s, ps, v \tag{2.31}$$

mit dem jede Vertex-Funktion zu multiplizieren ist.

2.2.3 Bemerkung zum Austauschdiagramm (VER76)

Die bis jetzt angegebenen Formeln beziehen sich auf den direkten Graphen. In diesem Kapitel soll der Austauschgraph betrachtet werden. Es wird sich zeigen, daß es nicht notwendig ist, die Helizitätsamplituden für den Austauschgraphen

erneut herzuleiten, sondern daß es möglich ist, eine Relation anzugeben, die die Amplituden des Austauschgraphen mit denen des direkten Graphen verbindet.

Dazu soll zunächst gezeigt werden, wie sich ein Zweiteilchenzustand unter der Vertauschung der beiden Teilchen verhält.

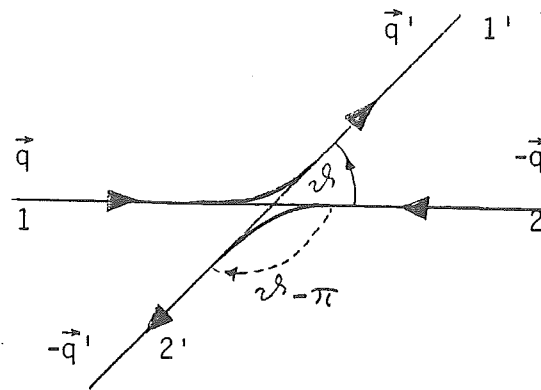


Fig. 4: Zum Austauschdiagramm

Sei die Richtung von \vec{q} mit der z-Achse identisch. Der Streuwinkel in c.m.s. ist gegeben durch den Polarwinkel ϑ . Der Endzustand der zwei Teilchen 1', 2' ist dann in Polarkoordinaten

$$|q', \vartheta, 0; \lambda_1, \lambda_2\rangle. \quad (2.32)$$

Bei Vertauschung von 1' und 2' lautet der Endzustand

$$|q', \vartheta - \pi, 0; \lambda_2, \lambda_1\rangle. \quad (2.33)$$

Im folgenden soll nun zwischen diesen beiden Zuständen eine Phasenrelation hergeleitet werden, mit der anschließend die Partialwellen des Austausch- und des direkten Potentials in Beziehung gesetzt werden können.

Für den Helizitätsanteil des Zweiteilchenzustands (2.32) gilt nach (2.8):

$$|\lambda'_1 \lambda'_2\rangle = e^{-i\sigma_y} |s'_1 \lambda'_1\rangle |s'_2 - \lambda'_2\rangle \quad (2.34)$$

Mit den üblichen Clebsch-Gordon-Koeffizienten ist

$$|s'_1 \lambda'_1\rangle |s'_2 - \lambda'_2\rangle = \sum_{s', \lambda'} |s' \lambda'\rangle \langle s' \lambda' | s'_1 \lambda'_1 s'_2 - \lambda'_2 \rangle \quad (2.35)$$

$$\text{mit } |s'_1 - s'_2| \leq s' \leq s'_1 + s'_2 \\ \lambda' = \lambda'_1 - \lambda'_2$$

Aus den Symmetrieeigenschaften der Clebsch-Gordon-Koeffizienten folgt:

$$|s'_2 - \lambda'_2\rangle |s'_1 \lambda'_1\rangle = \sum_{s', \lambda'} (-1)^{s'_1 + s'_2 - s'} |s' \lambda'\rangle \langle s' \lambda' | s'_1 \lambda'_1 s'_2 - \lambda'_2 \rangle \quad (2.36)$$

Führt man die Summation über s' in (2.35) und (2.36) aus, dann erhält man

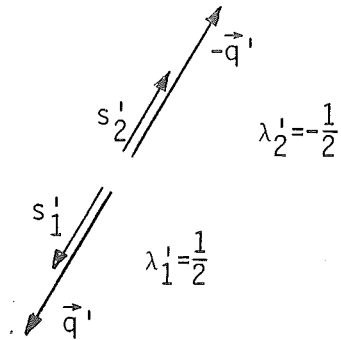
$$|s'_1 \lambda'_1\rangle |s'_2 - \lambda'_2\rangle = \sum_{\lambda'} \{ |0\lambda'\rangle \langle 0\lambda' | s'_1 \lambda'_1 s'_2 - \lambda'_2 \rangle + |1\lambda'\rangle \langle 1\lambda' | s'_1 \lambda'_1 s'_2 - \lambda'_2 \rangle \} \quad (2.37)$$

$$|s'_2 - \lambda'_2\rangle |s'_1 \lambda'_1\rangle = \sum_{\lambda'} \{ -|0\lambda'\rangle \langle 0\lambda' | s'_1 \lambda'_1 s'_2 - \lambda'_2 \rangle + |1\lambda'\rangle \langle 1\lambda' | s'_1 \lambda'_1 s'_2 - \lambda'_2 \rangle \} \quad (2.38)$$

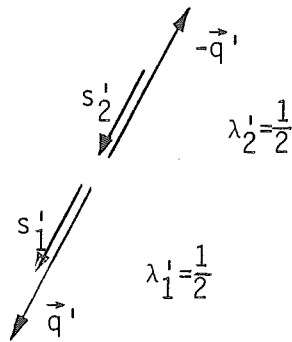
$$\Rightarrow |s'_1 \lambda'_1\rangle |s'_2 - \lambda'_2\rangle = -|s'_2 - \lambda'_2\rangle |s'_1 \lambda'_1\rangle \quad \text{für Spin-Singulett} \quad (2.39)$$

$$|s'_1 \lambda'_1\rangle |s'_2 - \lambda'_2\rangle = |s'_2 - \lambda'_2\rangle |s'_1 \lambda'_1\rangle \quad \text{für Spin-Triplett}$$

Im Spin-Singulett-Zustand koppeln die Spins antiparallel, d.h.



Im Spin-Triplett-Zustand koppeln die Spins parallel, d.h.



Daher lassen sich die beiden Relationen (2.39) zusammenfassen zu:

$$|s_1' \lambda_1'\rangle |s_2' -\lambda_2'\rangle = (-)^{\lambda_1' - \lambda_2'} |s_2' -\lambda_2'\rangle |s_1' \lambda_1'\rangle, \quad (2.40)$$

oder mit (2.32), (2.33) und (2.34):

$$|q', \vartheta, 0; \lambda_1' \lambda_2'\rangle = (-)^{\lambda_1' - \lambda_2'} |q, \vartheta - \pi, 0; \lambda_2' \lambda_1'\rangle \quad (2.41)$$

Unter Benutzung der Beziehung (2.41) ergibt sich für die Partialwellen (vgl. (2.18))

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1' \lambda_2' | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) d_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1' - \lambda_2'}^J(\vartheta) \langle \lambda_1' \lambda_2' | V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\ &= 2\pi (-)^{\lambda_1' - \lambda_2'} \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) d_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1' - \lambda_2'}^J(\vartheta - \pi) \langle \lambda_2' \lambda_1' | V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \end{aligned}$$

Mit der Symmetrierelation der d-Funktionen:

$$d_{mn}^J(\vartheta - \pi) = (-)^{J-n} d_{m, -n}^J(\vartheta)$$

folgt:

$$\langle \lambda_1' \lambda_2' | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = (-)^J 2\pi \int_{-1}^{+1} d(\cos\vartheta) d_{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2' - \lambda_1'}^J(\vartheta) \langle \lambda_2' \lambda_1' | V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

oder:

$$\langle \lambda_1' \lambda_2' | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = (-)^J \langle \lambda_2' \lambda_1' | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (2.42)$$

Mit der Bezeichnung:

$$\begin{aligned} d^J &:= \langle \lambda_1' \lambda_2' | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \\ e^J &:= \langle \lambda_2' \lambda_1' | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

erhält man die Resultate:

$$\begin{aligned} d^J_1 &= (-)^J e^J_1 & d^J_2 &= (-)^J e^J_2 \\ d^J_3 &= (-)^J e^J_4 & d^J_4 &= (-)^J e^J_3 \\ d^J_5 &= (-)^J e^J_5 & d^J_6 &= (-)^J e^J_8 \\ d^J_7 &= (-)^J e^J_7 & d^J_8 &= (-)^J e^J_6 \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.2.4 Transformation der Partialwellen in die $|JMLS\rangle$ Basis

Das Integral (2.18) liefert in Verbindung mit den Formeln (2.28), (2.29), (2.30) die Partialwellen des Potentials in der Helizitätsdarstellung.

Der Übergang in die übliche $|JMLS\rangle$ Darstellung erfolgt durch eine Basistransformation (CHU71).

Für die Transformation der Zustände gilt:

$$|JMLS\rangle = \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \langle JM \lambda_1 \lambda_2 | JMLS \rangle |JM \lambda_1 \lambda_2\rangle$$

Daraus folgt für die Transformation der Matrixelemente (2.18)

$$\begin{aligned} \langle JML'S' | V^J(q', q) | JMLS \rangle &= \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \\ \lambda'_1, \lambda'_2}} \langle JML'S' | JM \lambda'_1 \lambda'_2 \rangle \langle JM \lambda_1 \lambda_2 | JMLS \rangle \\ &\times \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die Koeffizienten der Transformationsmatrix sind gegeben durch (CHU71):

$$\langle JMLS | JM \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \left(\frac{2L+1}{2J+1} \right)^{1/2} \langle LOS \lambda | J \lambda \rangle \langle s_1 \lambda_1 s_2 -\lambda_2 | s \lambda \rangle \quad \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \quad (2.46)$$

Die Koeffizienten $\langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | \ell m \rangle$ sind die üblichen Clebsch-Gordon-Koeffizienten.

Im Anhang 1 sind die für die Transformation notwendigen Koeffizienten angegeben. Man erhält:

Spin-singlet:

$$S=0, L'=L=J : {}^0V^J = V_1^J - V_2^J$$

Spin-triplet:

$$S=1, L'=L=J : {}^1V^J = V_3^J - V_4^J$$

$$L'=L=J+1 : {}^+V^J = \frac{1}{2J+1} [(J+1) {}^{12}V^J + J {}^{34}V^J - \sqrt{J(J+1)} ({}^{57}V^J + {}^{68}V^J)]$$

$$L'=L=J-1 : {}^-V^J = \frac{1}{2J+1} [J {}^{12}V^J + (J+1) {}^{34}V^J + \sqrt{J(J+1)} ({}^{57}V^J + {}^{68}V^J)] \quad (2.47)$$

$$L'=J+1; L=J-1 : {}^{+-}V^J = -\frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [{}^{12}V^J - {}^{34}V^J + \frac{J+1}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{57}V^J - \frac{J}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{68}V^J]$$

$$L'=J-1; L=J+1 : {}^{-+}V^J = -\frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [{}^{12}V^J - {}^{34}V^J - \frac{J}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{57}V^J + \frac{J+1}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{68}V^J]$$

Triplet-singlet transition:

$$L'=L=J; S'=0; S=1 : S T_V^J = -2 V^J$$

$$S'=1; S=0 : T S_V^J = -3 V^J$$

Die Potentialamplituden besitzen folgende Symmetrieeigenschaften:

i) Vertauschung von Eingangs- und Ausgangsimpuls

$$\begin{aligned} {}^0V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^0V^J(M_1M_2M_1'M_2';qq') \\ {}^1V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^1V^J(M_1M_2M_1'M_2';qq') \\ {}^+V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^+V^J(M_1M_2M_1'M_2';qq') \\ {}^-V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^-V^J(M_1M_2M_1'M_2';qq') \\ {}^{+-}V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^{+-}V^J(M_1M_2M_1'M_2';qq') \\ {}^{ST}V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= -{}^{TS}V^J(M_1M_2M_1'M_2';qq') \end{aligned} \quad (2.48)$$

ii) Vertauschung der Eingangs- und Ausgangsmassen

$$\begin{aligned} {}^0V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^0V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \\ {}^1V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^1V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \\ {}^+V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^+V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \\ {}^-V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^-V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \\ {}^{+-}V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^{+-}V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \\ {}^{-+}V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= {}^{-+}V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \\ {}^{ST}V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= -{}^{ST}V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \\ {}^{TS}V^J(M_1M_2M_1'M_2';q'q) &= -{}^{TS}V^J(M_2M_1M_2'M_1';q'q) \end{aligned} \quad (2.49)$$

2.3 Operatorformen der Lambda-Nukleon-OBEPs

Die vorhergehenden Kapitel behandeln die ΛN -OBEPs stets in einer bestimmten Darstellung. Es wurden die Partialwellen des Potentials in der Helizitäts- bzw. in der $|LSJ\rangle$ -Basis angegeben. Der Grund dafür ist die noch zu behandelnde ΛN -Streuung. Es ist nicht möglich, die Streugleichung basisunabhängig, d.h. in Operatorform, zu lösen.

In diesem Kapitel nun sollen die ΛN -OBEPs von einer anderen Seite her betrachtet werden. Um deutlicher zu sehen, in welchen Potentialformen (z.B. Zentral, Tensor, usw.) welche Mesonen eine Rolle spielen und um in einfacher Weise einige qualitative Vergleiche mit der NN -Wechselwirkung zu diskutieren, ist es günstiger, die ΛN -Wechselwirkung in ihrer Operatorstruktur zu berechnen. Denn es ist sehr schwierig, aus den Potentialpartialwellen die Einzelbeiträge der verschiedenen Mesonen zu extrahieren, da i.a. mehrere Operatoren zu einer Partialwelle beitragen.

Die Rechnung unterscheidet sich von der in Kap. 2 dadurch, daß die Dirac-Spinoren in der üblichen Pauli-Darstellung verwendet und die Paulischen Spineigenfunktionen $|\chi\rangle$ im Ergebnis fortgelassen werden.

Die verwendete Notation entnehme man folgender Figur:

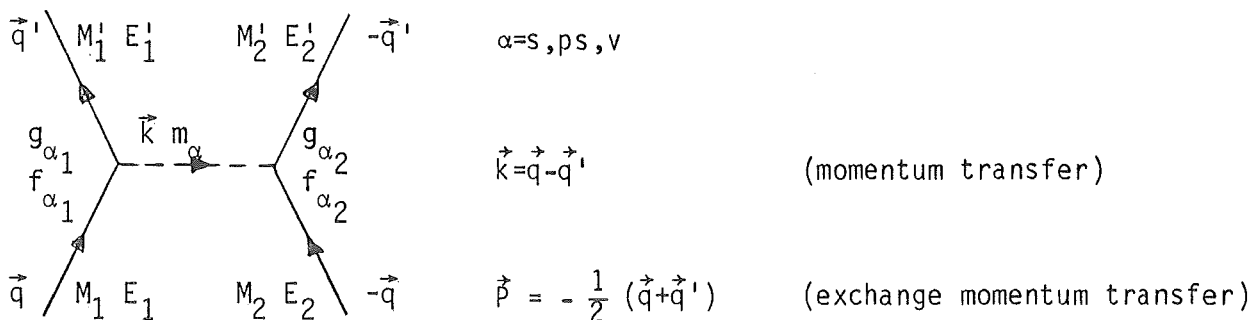


Fig. 5: Zur Erläuterung der Formeln

Um die Formeln übersichtlich zu halten, werden hier die nicht-relativistischen Näherungen der ΛN -OBEs diskutiert. Diese Näherung beinhaltet, daß in den Berechnungen der Übergangsmatrixelemente konsequent nur Terme bis zur Ordnung k^2/M^2 mitgenommen wurden. Die vollständigen relativistischen Ausdrücke, die auch den zu diesem Kapitel gehörenden Kurven zugrundeliegen, findet man im Anhang 3.

Es werden nun zunächst die Formeln genannt, auch wenn dafür einige Seiten in Anspruch genommen werden, und danach diskutiert.

Folgende Operatorformen treten auf:

$$\begin{aligned}
 \Omega_c &= 1 & (\text{zentral}) \\
 \Omega_\sigma &= \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 & (\text{spinabhängig-zentral}) \\
 \Omega_{SL} &= \frac{i}{2} (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2) \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) & (\text{Spin-Bahn}) \\
 \Omega_{ST} &= \frac{i}{2} (\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2) \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) & (\text{antisymmetrisch-Spin-Bahn}) \quad (2.50) \\
 \Omega_{dL} &= \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) & (\text{quadratisch-Spin-Bahn}) \\
 S_{12}(\hat{k}) &= \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{k} \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{k} - \frac{1}{3} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 & (\text{Tensor in } k) \\
 S_{12}(\hat{p}) &= \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p} - \frac{1}{3} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 & (\text{Tensor in } p) \\
 \Omega_{pk} &= \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p}
 \end{aligned}$$

Direkter Graph ($M_1 = M'_1 = M_N; M_2 = M'_2 = M_\Lambda$)

skalare Kopplung:

$$\begin{aligned}
 V_D^S(\vec{k}, \vec{p}) &= \frac{-g_{s1} g_{s2}}{\vec{k}^2 + m_S^2} \left[\left\{ 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{M_N^2} + \frac{1}{M_\Lambda^2} \right) \vec{p}^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{M_N^2} + \frac{1}{M_\Lambda^2} \right) \vec{k}^2 \right\} \Omega_c \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{4M_N^2} + \frac{1}{4M_\Lambda^2} \right\} \Omega_{SL} - \left\{ \frac{1}{4M_N^2} - \frac{1}{4M_\Lambda^2} \right\} \Omega_{ST} \right] \quad (2.51)
 \end{aligned}$$

pseudoskalare Kopplung:

$$v_D^{ps}(\vec{k}, \vec{p}) = \frac{-g_{ps1} g_{ps2}}{\vec{k}^2 + m_{ps}^2} \left[\frac{\vec{k}^2}{4M_N M_\Lambda} \cdot S_{12}(\hat{k}) + \frac{\vec{k}^2}{12M_N M_\Lambda} \Omega_\sigma \right] \quad (2.52)$$

Vektorkopplung:

$$\begin{aligned} v_D^v(\vec{k}, \vec{p}) = & \frac{1}{\vec{k}^2 + m_v^2} \left[\left((G_{v1} - f_{v1} \frac{M_N}{\mu}) (G_{v2} - f_{v2} \frac{M_\Lambda}{\mu}) \right. \right. \\ & + \frac{1}{M_N M_\Lambda} \left[(G_{v1} - f_{v1} \frac{M_N}{\mu}) (G_{v2} - f_{v2} \frac{M_\Lambda}{\mu}) \left(1 + \frac{M_\Lambda}{4M_N} + \frac{M_N}{4M_\Lambda} \right) \right] \vec{p}^2 \\ & + \frac{1}{M_N M_\Lambda} \left[\frac{1}{16} (3f_{v1} f_{v2} \frac{M_N M_\Lambda}{\mu^2} - G_{v1} G_{v2}) \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) - \frac{1}{8\mu} (G_{v1} f_{v2} M_N + G_{v2} f_{v1} M_\Lambda) \right. \\ & + \left. \left. \frac{1}{16\mu} (G_{v2} f_{v1} M_N - G_{v1} f_{v2} M_\Lambda) \left(\frac{M_N}{M_\Lambda} - \frac{M_\Lambda}{M_N} \right) \right] \vec{k}^2 \right] \Omega_c \\ & - G_{v1} G_{v2} \frac{\vec{k}^2}{6M_N M_\Lambda} \cdot \Omega_\sigma + G_{v1} G_{v2} \frac{\vec{k}^2}{4M_N M_\Lambda} \cdot S_{12}(\hat{k}) \quad (2.53) \\ & + \frac{1}{2M_N M_\Lambda} \left\{ G_{v1} G_{v2} \left(2 + \frac{1}{2} \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) \right) + \frac{G_{v1} f_{v2}}{\mu} \left(\frac{M_N}{2} - M_\Lambda \left(1 + \frac{M_\Lambda}{2M_N} \right) \right) \right. \\ & + \frac{G_{v2} f_{v1}}{\mu} \left(\frac{M_\Lambda}{2} - M_N \left(1 + \frac{M_N}{2M_\Lambda} \right) \right) - \frac{f_{v1} f_{v2}}{2\mu^2} (M_\Lambda^2 + M_N^2) \left. \right\} \Omega_{SL} \\ & + \frac{1}{2M_N M_\Lambda} \left\{ G_{v1} G_{v2} \frac{1}{2} \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} - \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) - \frac{G_{v1} f_{v2}}{\mu} \left(\frac{M_N}{2} + M_\Lambda \left(1 + \frac{M_\Lambda}{2M_N} \right) \right) \right. \\ & + \left. \frac{G_{v2} f_{v1}}{\mu} \left(\frac{M_\Lambda}{2} + M_N \left(1 + \frac{M_N}{2M_\Lambda} \right) \right) - \frac{f_{v1} f_{v2}}{2\mu^2} (M_\Lambda^2 - M_N^2) \right\} \Omega_{ST} \end{aligned}$$

Austauschgraph ($M_1 = M'_2 = M_N; M_2 = M'_1 = M_\Lambda$)

pseudoskalare Kopplung:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{ex}}^{\text{ps}}(\vec{k}, \vec{p}) = & \frac{g_{\text{ps}}^2}{\vec{k}^2 + m_{\text{ps}}^2} \cdot \frac{1}{4M_N M_\Lambda} \left[\left\{ \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) \right) \vec{k}^2 \right. \right. \\
 & - \left. \frac{1}{3} \left(2 - \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) \right) \vec{p}^2 \right\} \Omega_\sigma \\
 & + \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) \right) \vec{k}^2 \right\} \cdot s_{12}(\hat{k}) \\
 & + \left\{ \left(2 - \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) \right) \vec{p}^2 \right\} \cdot s_{12}(\hat{p}) \\
 & - \left. \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{M_N}{M_\Lambda} - \frac{M_\Lambda}{M_N} \right) \right\} \Omega_{\text{pk}} \right]
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Vektor-Kopplung:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{ex}}^{\text{v}}(\vec{k}, \vec{p}) = & \frac{-1}{\vec{k}^2 + m_{\text{v}}^2} \left[\left\{ g_{\text{v}}^2 + \frac{1}{M_N M_\Lambda} \left[G_{\text{v}}^2 \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{M_N}{M_\Lambda} + \frac{M_\Lambda}{M_N} \right) \right) \right. \right. \right. \\
 & + \frac{f_{\text{v}}^2}{4\mu^2} M_N M_\Lambda \left(5 + \frac{M_\Lambda}{2M_N} + \frac{M_N}{2M_\Lambda} \right) - \frac{3G_{\text{v}} f_{\text{v}}}{2\mu} (M_\Lambda + M_N) \left. \right\} \vec{p}^2 \\
 & - \frac{1}{M_N M_\Lambda} \left[G_{\text{v}}^2 \frac{1}{16} \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} \right) + \frac{G_{\text{v}} f_{\text{v}}}{8\mu} (M_N + M_\Lambda) \right. \\
 & - \left. \left. \frac{3f_{\text{v}}^2}{16\mu^2} M_N M_\Lambda \left(\frac{M_\Lambda}{2M_N} + \frac{M_N}{2M_\Lambda} + 1 \right) \right] \vec{k}^2 \right\} \Omega_{\text{c}} \\
 & + \left\{ G_{\text{v}}^2 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2M_N} - \frac{1}{2M_\Lambda} \right)^2 \vec{p}^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4M_N} + \frac{1}{4M_\Lambda} \right)^2 \vec{k}^2 \right] \right\} \Omega_\sigma \\
 & + \left\{ G_{\text{v}}^2 \left(\frac{1}{4M_N} + \frac{1}{4M_\Lambda} \right)^2 \vec{k}^2 \right\} s_{12}(\hat{k}) - \left\{ G_{\text{v}}^2 \left(\frac{1}{2M_N} - \frac{1}{2M_\Lambda} \right)^2 \vec{p}^2 \right\} s_{12}(\hat{p}) \\
 & + \left. \left\{ \frac{1}{M_N M_\Lambda} \left[\frac{G_{\text{v}}^2}{2} \left(\frac{M_\Lambda}{M_N} + \frac{M_N}{M_\Lambda} + 1 \right) - \frac{G_{\text{v}} f_{\text{v}}}{2\mu} (M_N + M_\Lambda) \right] \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$- \frac{f_v^2}{4\mu^2} M_N M_\Lambda \left(\frac{M_\Lambda}{2M_N} + \frac{M_N}{2M_\Lambda} + 1 \right) \} \Omega_{SL} \\ + \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{1}{M_N^2} - \frac{1}{M_\Lambda^2} \right) \right\} \Omega_{pk}]$$

Die den ΛN -Ausdrücken entsprechenden NN -Formeln lauten: ($M_1=M_1'=M_2=M_2'=M_N$).

skalare Kopplung:

$$V^S(\vec{k}, \vec{p}) = - \frac{g_S^2}{\vec{k}^2 + m_S^2} \left[\left\{ 1 - \frac{\vec{p}^2}{2M_N^2} + \frac{\vec{k}^2}{8M_N^2} \right\} \Omega_c - \frac{1}{2M_N^2} \Omega_{SL} \right] \quad (2.56)$$

pseudoskalare Kopplung:

$$V^{PS}(\vec{k}, \vec{p}) = - \frac{g_{ps}^2}{\vec{k}^2 + m_{ps}^2} \left[\frac{\vec{k}^2}{4M_N^2} S_{12}(\hat{k}) + \frac{\vec{k}^2}{12M_N^2} \Omega_\sigma \right] \quad (2.57)$$

Vektor-Kopplung:

$$V^V(\vec{k}, \vec{p}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m_V^2} \left[\left\{ g_V^2 \left(1 + \frac{3\vec{p}^2}{2M_N^2} - \frac{\vec{k}^2}{8M_N^2} \right) - g_V f_V \frac{\vec{k}^2}{2M_N^2} \right\} \Omega_c \right. \\ \left. - G_V^2 \cdot \frac{\vec{k}^2}{6M_N^2} \cdot \Omega_\sigma + G_V^2 \frac{\vec{k}^2}{4M_N^2} \cdot S_{12}(\hat{k}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2M_N^2} \{ 3g_V^2 + 4g_V f_V \} \Omega_{SL} \right] \quad (2.58)$$

2.3.1 Qualitativer Vergleich: ΛN -NN-OBEPs

Ein Vergleich der freien ΛN -Wechselwirkung mit der freien NN-Wechselwirkung zeigt, daß die Ein-Boson-Austauschpotentiale für beide Systeme in vielen Punkten völlig analoge Eigenschaften aufweisen. Einige charakteristische Unterschiede zeigen sich jedoch aufgrund der Massendifferenz zwischen dem Λ -Baryon und dem Nukleon und den unterschiedlichen Kopplungen. Es treten zusätzliche Potentialoperatoren wie Ω_{ST} , $S_{12}(\hat{p})$ und Ω_{pk} auf. Da die ΛN -Wechselwirkung kurzreichweitiger als die NN-Wechselwirkung ist, was hauptsächlich mit dem Verbot des π -Austausches zusammenhängt, sind die ΛN -Potentialbeiträge für kleine Impulsüberträge in der Regel etwas kleiner als die entsprechenden Werte bei der NN-Wechselwirkung.

Es sollen in diesem Kapitel folgende Typen von Graphen miteinander verglichen werden⁺ (Die zu Fig. 6a gehörenden OBE-Potentiale sind zusätzlich mit dem Isospin-Operator $\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ zu multiplizieren wegen der Isospin 1-Mesonen):

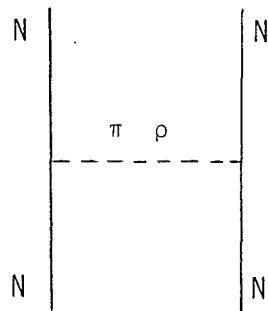


Fig. 6a

$$\Delta T_z = 1$$

Nukleon-Nukleon-System

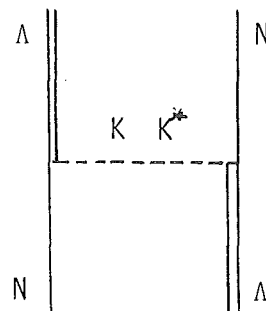


Fig. 6b

$$\Delta S = 1$$

Lambda-Nukleon-System

⁺ Die in den Rechnungen verwendeten Kopplungskonstanten entnehme man Kap. 3.

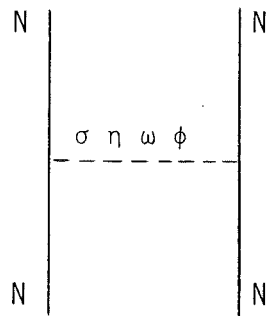


Fig. 7a

$$\Delta T_z = 0$$

Nukleon-Nukleon-System

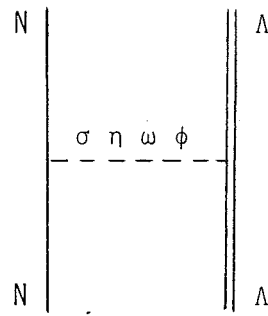


Fig. 7b

$$\Delta S = 0$$

Lambda-Nukleon-System

Im Graphen Fig. 6a wird die z-Komponente des Isospins um 1 geändert, während im Graphen Fig. 6b die Strangeness um 1 geändert wird. Diese beiden Operationen lassen sich im SU_3 -Bild völlig analog beschreiben: Im Baryonoktett geht das Proton über in ein Neutron (bzw. umgekehrt) mit Hilfe der Isospinschiebeoperatoren T_{\pm} , und das Nukleon geht über in ein Lambda (bzw. umgekehrt) mit Hilfe der Schiebeoperatoren U_{\pm} und V_{\pm} (vgl. Kap. 3).

In den Graphen Fig. 7 ist der Isospin- bzw. Strangeness-Austausch Null. Es tragen nur nicht-strange Isospin-Singulett-Mesonen bei.

Zu Fig. 6

In den Figuren 8 bis 11 sind die einzelnen Potentialbeiträge in MeV fm^3 gegen den Impulsübertrag in fm^{-1} für die beiden Graphen 6a, 6b aufgetragen*. Fig. 8 zeigt den Verlauf des Zentralpotentials (Ω_c für Fig. 6b bzw. $\Omega_c \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$ für Fig. 6a). Hier spielen nur die beiden Vektormesonen ρ bzw. K^* eine Rolle, da die

* Die Größe p (exchange momentum transfer) hat in allen Rechnungen den Wert $p = 1 \text{ fm}^{-1}$.

pseudoskalaren Mesonen π, K keinen Beitrag zum Zentralkanal geben. Die ΛN -Wechselwirkung ist in diesem Kanal stärker als die NN -Wechselwirkung. Ein Grund dafür wird die um einen Faktor von etwa 2 größere Vektorkopplungskonstante des K^* sein, während die Tensorkopplungen des K^* bzw. ρ von etwas der gleichen Größenordnung sind. Das zusätzliche Minuszeichen, das in allen Potentialteilen des ΛN -Graphen auftaucht, rührt vom Austauschcharakter des Diagramms 6b her.

Die Tensorkraft (Fig. 9) der ΛN -Wechselwirkung zeigt im Vergleich mit dem NN -System einige interessante Eigenschaften. Analog zu der von der NN -Wechselwirkung her bekannten Tatsache, daß bei der Addition von π und ρ eine teilweise Unterdrückung der Tensorkraft auftritt, zeigt sich dieser Effekt auch in der ΛN -Wechselwirkung bei der Addition von K und K^* , wobei aber diese Tensorcancellation im ΛN -System noch viel ausgeprägter ist. Der Grund dafür ist hauptsächlich in der Massendifferenz der beiden pseudoskalaren Mesonen π und K zu sehen. Das π ist mit $m_\pi = 138$ MeV das leichteste Meson. Es trägt schon bei kleinen Impulsüberträgen stark bei und erreicht sein Maximum bei etwa $k = 2$ fm^{-1} . Der Verlauf des Tensorpotentials vom schwereren Kaon ($m_K = 495$ MeV) ist viel flacher, und die Kurve erreicht ihr Maximum bei etwa $k = 3.5$ fm^{-1} . Die Beiträge der beiden Vektormesonen K^* und ρ sind vergleichbar ($m_{K^*} = 895$ MeV, $m_\rho = 773$ MeV). Das relative Vorzeichen zwischen K und K^* bzw. π und ρ ist in beiden Fällen gleich, wodurch es in beiden Systemen zu einer Unterdrückung des Tensorpotentials kommt.

Da die Massendifferenz zwischen K und K^* ($m_{K^*} - m_K = 400$ MeV) verglichen mit π und ρ ($m_\rho - m_\pi = 635$ MeV) kleiner ist, zeigt sich im ΛN -Graphen (6b) eine sehr viel stärkere Tensorunterdrückung als im NN -Graphen (6a). Bis zu Impulsüberträgen $k \sim 2$ fm^{-1} ist das resultierende Tensorpotential verschwindend klein, während es im NN -Fall in diesem Bereich sein Maximum annimmt.

Trotz der in den Berechnungen angenommenen SU_3 -Symmetrie, die in der Realität nur näherungsweise erfüllt ist, wird diese qualitative Aussage richtig bleiben, da dieses Potentialverhalten hauptsächlich auf die unterschiedlichen Massen der beiden Mesonen π und K zurückzuführen ist und nicht so sehr auf die verwendeten Kopplungskonstanten, die höchstens die absoluten Werte beeinflussen könnten, aber nicht die Tendenz im Verlauf der Kurven.

In diesem Zusammenhang soll ein weiterer Punkt des ΛN -Systems angesprochen werden, der im Hinblick auf später durchzuführende Kernmaterie-Rechnungen interessant ist.

Vom NN -System her ist bekannt (KB65), daß der Term zweiter Ordnung, speziell das Quadrat des Tensorpotentials, einen großen Beitrag zur Bindungsenergie eines Nukleons in Kernmaterie gibt. Für den NN -Fall entsteht dieser Beitrag durch:

$$\begin{aligned} & [V_{\text{Tensor}}^{\text{NN}}(\vec{k}, \vec{p}) \cdot s_{12}(\hat{k}) \cdot \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2]^2 \\ & = [V_{\text{Tensor}}^{\text{NN}}(\vec{k}, \vec{p})]^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \frac{2}{3} s_{12}(\hat{k}) \right) (3 - 2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Für den ΛN -Fall lautet die entsprechende Beziehung

$$\begin{aligned} & [V_{\text{Tensor}}^{\Lambda N}(\vec{k}, \vec{p}) \cdot s_{12}(\hat{k})]^2 \\ & = [V_{\text{Tensor}}^{\Lambda N}(\vec{k}, \vec{p})]^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{9} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 - \frac{2}{3} s_{12}(\hat{k}) \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Da im ΛN -System

1) der Isospinoperator $\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$ fehlt - er liefert bei NN einen Faktor 3 - und

$$2) \quad \left| v_{\text{Tensor}}^{\Lambda N}(\vec{k}, \vec{p}) \right| \ll \left| v_{\text{Tensor}}^{NN}(\vec{k}, \vec{p}) \right|,$$

läßt sich sagen, daß das Quadrat des Tensorpotentials in der Berechnung der Λ -Bindungsenergie in Kernmaterie nur eine untergeordnete Rolle spielen wird. Da außerdem alle anderen beitragenden Potentialformen des ΛN -Systems mit den entsprechenden NN-Werten in etwa vergleichbar sind, bedeutet dies, daß die Bindungsenergie eines Λ -Teilchens in Kernmaterie kleiner sein muß als die eines Nukleons.

In Fig. 10 ist der Verlauf des $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ -Potentials dargestellt. In diesem Kanal zeigen beide Wechselwirkungen gleiches Verhalten. Die Beiträge von K und K^* addieren sich analog zur Addition von π und ρ . Deutlich ist in Fig. 10b wieder der frühe Anstieg des π -Potentials zu erkennen, was dazu führt, daß im unteren Energiebereich das π in diesem Kanal dominant ist, während das ρ erst für größere Impulsüberträge wichtig wird. Im ΛN -System ist dagegen der Beitrag des Vektormesons K^* zum $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ -Potential stets größer als der des Kaons.

Zur Spin-Orbit-Kraft (Fig. 11) in den Graphen (Fig. 6) tragen nur die beiden Vektormesonen ρ und K^* bei. Im ΛN -System ist sie etwa um einen Faktor 1.6 größer als im NN-System. Die etwas größere Reichweite des ρ -Mesons verglichen mit dem K^* (Massendifferenz zwischen ρ und K^* : 122 MeV) zeigt sich hier in den verschiedenen Lagen der Maxima. Das ρ -Meson erreicht seinen maximalen Wert bei ca. $k \sim 1.8 \text{ fm}^{-1}$ und das K^* ein wenig später bei ca. $k \sim 2.2 \text{ fm}^{-1}$.

Zu Fig. 7

Die Figuren 12-17 zeigen die Potentialbeiträge der Mesonen $\sigma, \eta, \omega, \phi$ zu den Graphen 7a, 7b. Da hier in beiden Graphen die gleichen Mesonen ausgetauscht werden, lassen sich alle auftretenden Unterschiede auf die verschiedenen starken Kopplungen der Mesonen zu den NN- bzw. $\Lambda\Lambda$ -Vertices zurückführen. Daß die Massendifferenz zwischen Nukleon und Λ -Teilchen in dieser Betrachtung vernachlässigt werden kann (dies gilt mit Ausnahme der Fig. 17, in der diese Differenz eine kleine Rolle spielt), sieht man sehr deutlich an den Beiträgen des effektiven skalaren σ -Mesons zum Zentral- und zum Spin-Orbit-Potential. Denn da die Kopplungskonstante des σ -Mesons für den NN-Vertex den gleichen Wert hat wie für den $\Lambda\Lambda$ -Vertex, kann sich ein Unterschied im Verlauf des skalaren Potentials für die beiden Graphen 7a, 7b nur durch die Differenz zwischen Nukleonmasse und Λ -Masse ergeben. Die Kurven in Fig. 12 bzw. Fig. 16 zeigen aber, daß sich das σ -Meson in beiden Graphen fast identisch verhält.

Im Zentralkanal der $\Lambda\Lambda$ -Wechselwirkung (Fig. 12) zeigt sich ebenso wie in der NN-Wechselwirkung eine sehr starke Cancellation zwischen σ - und ω -Meson. Das schwere Vektormeson ϕ ($m_\phi = 1019$ MeV) ist dabei völlig vernachlässigbar. Da die Kopplung des ω -Mesons zum $\Lambda\Lambda$ -Vertex kleiner als zum NN-Vertex ist, ergibt sich in der Summe für den Graphen 7b bis zu einem Impulsübertrag von ca. $k \sim 0.7 \text{ fm}^{-1}$ ein attraktives Zentralpotential (Fig. 13), d.h. das σ -Meson überwiegt hier, während im NN-Fall das ω -Meson über dem ganzen Energiebereich stärker ist. Das Potential ist dort repulsiv.

Die Tensor- und Spin-Spin-Potentiale (Fig. 14, 15) zeigen für beide Systeme fast gleiche Verläufe. Im $\Lambda\Lambda$ -System sind diese Beiträge generell etwas geringer, da hier die meisten Kopplungskonstanten kleiner sind als im Nukleon-Nukleon-Fall. Eine Ausnahme ist das ϕ -Meson mit einer relativ starken Tensor-

Tensor-Kopplung. Sie ist im ΛN -System etwa um einen Faktor 8 größer als im NN -System, wo es völlig vernachlässigbar ist. Aber aufgrund der großen Masse bleiben die Beiträge trotzdem gering.

Das unterschiedliche Vorzeichen in der Kopplungskonstanten des η -Mesons zum NN - bzw. ΛN -Vertex äußert sich darin, daß sich die Tensorbeiträge von η, ω, ϕ in der ΛN -Wechselwirkung addieren, während in der NN -Wechselwirkung der Tensoranteil des η ein anderes Vorzeichen besitzt als ω und ϕ . In den Spin-Spin-Kanälen der beiden Wechselwirkungen ist es genau umgekehrt. Da aber ohnehin die Beiträge vom η -Meson sehr klein sind, ist dieser Unterschied zwischen ΛN und NN minimal.

Im Verlauf des Spin-Orbit-Potentials (Fig. 16) sieht man sehr deutlich die bereits angesprochene stärkere Kopplung des ϕ -Mesons zum ΛN -Vertex, es liefert dort größere Beiträge als das σ -Meson, während es im NN -System schwächer ist als das skalare Meson. In der Summe jedoch ist das Spin-Orbit-Potential für ΛN etwas kleiner als für NN . Es wird im ΛN -System ebenso wie im NN -System hauptsächlich durch das ω -Meson bestimmt.

In Fig. 17 ist der Verlauf des antisymmetrischen Spin-Orbit-Potentials dargestellt. Diese Potentialform kommt im NN -System nicht vor. Sie wird zum einen durch die Massendifferenz zwischen den beiden wechselwirkenden Baryonen (hier Λ, N) und zum anderen durch die verschiedenen Kopplungen der Mesonen an den beiden Vertices bestimmt. An dem verschwindend kleinen Beitrag des σ -Mesons, dessen Kopplungskonstante an beiden Vertices gleich ist, sieht man, daß die Massendifferenz $M_\Lambda - M_N$ nur einen sehr kleinen Einfluß auf die Größe dieses Potentials hat. Der Grund für das Auftreten der antisymmetrischen Spin-Orbit-Kraft, die sehr klein bleibt und hauptsächlich von den beiden Vektormesonen ω und ϕ bestimmt wird (sie addieren sich mit umgekehrtem Vorzeichen), liegt

daher zum weitaus größten Teil an den Unterschieden in den Kopplungskonstanten an den beiden Vertices.

Durch das Auftreten dieses Operators Ω_{ST} in der ΛN -Wechselwirkung ergibt sich ein weiterer Unterschied zum NN -System. Es sind im ΛN -Graphen Spin-Singulett-Triplett-Übergänge möglich, d.h. der Gesamtspin ist im ΛN -System keine gute Quantenzahl mehr (vgl. Kap. 2.2.1), denn die Matrixelemente von Ω_{ST} lauten:*)

$$\begin{aligned} \langle SLJM | \Omega_{ST} | S' L J M \rangle &= \frac{1}{2} [0][S][S'][L] \sqrt{L(L+1)} \sqrt{6} (-)^{S'+J+L} \\ &\delta_{LJ} \begin{Bmatrix} S & S' & 1 \\ L & L & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ S' & S & 1/2 \end{Bmatrix} \times ((-)^{S'} - (-)^S) \end{aligned} \quad (2.61)$$

Daraus ergibt sich die nicht-diagonale Matrix:

$$\begin{array}{l} S=0 \\ S=1 \end{array} \begin{pmatrix} \begin{matrix} S'=0 & S'=1 \\ 0 & -\sqrt{J(J+1)} \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\sqrt{J(J+1)} & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

*) Notation: $[K] = \sqrt{2K+1}$

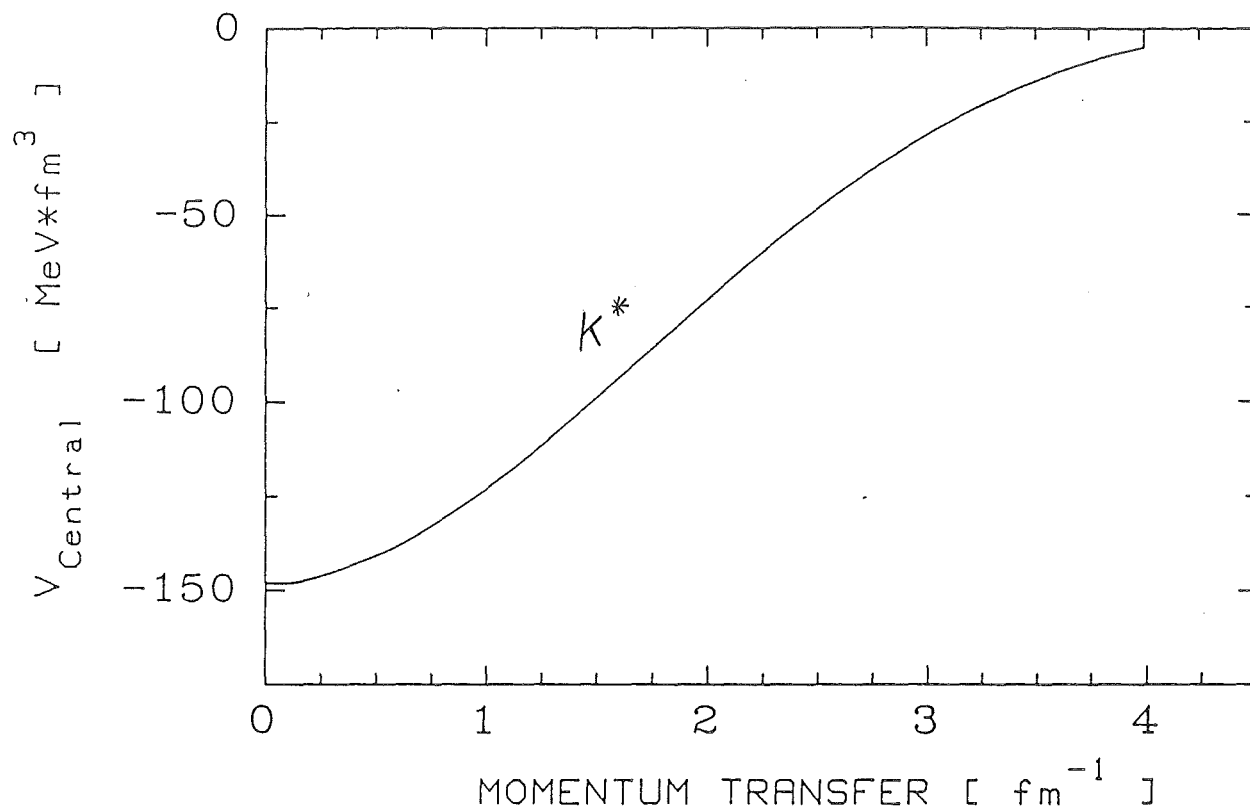


Fig. 8a

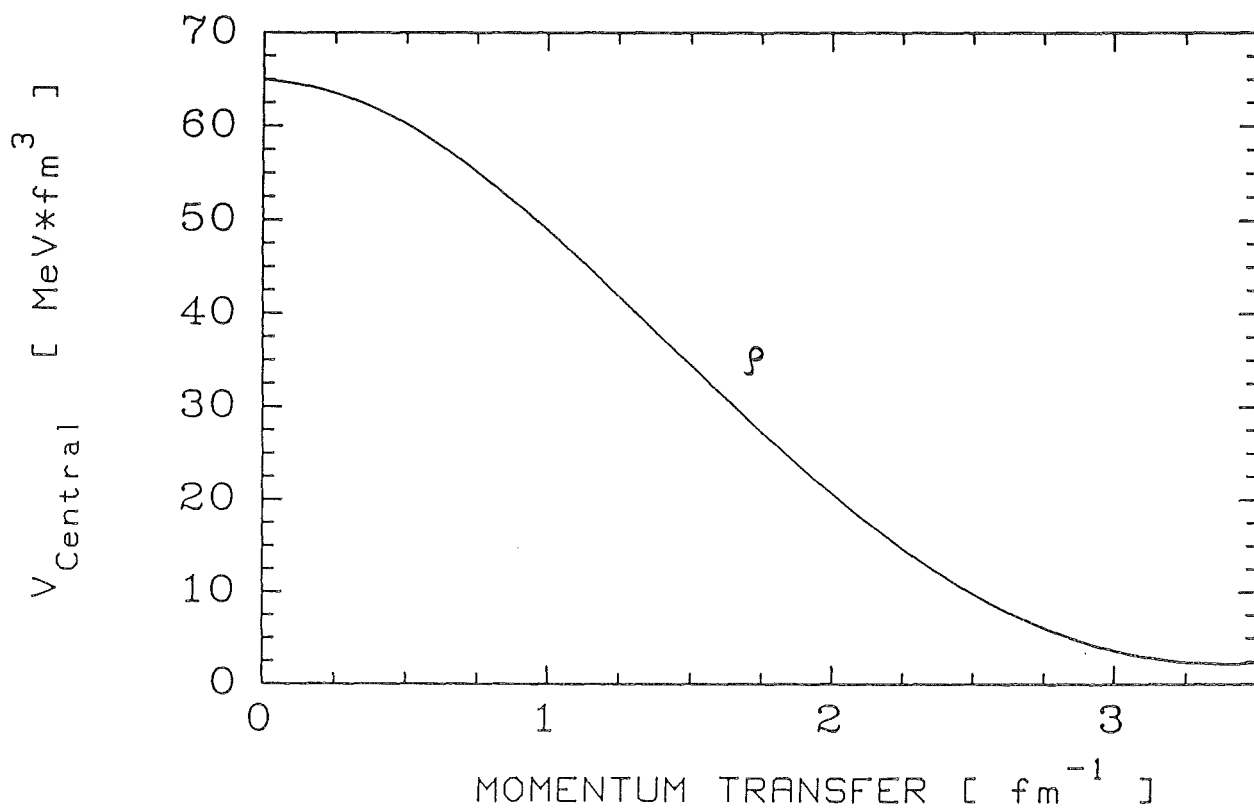


Fig. 8b

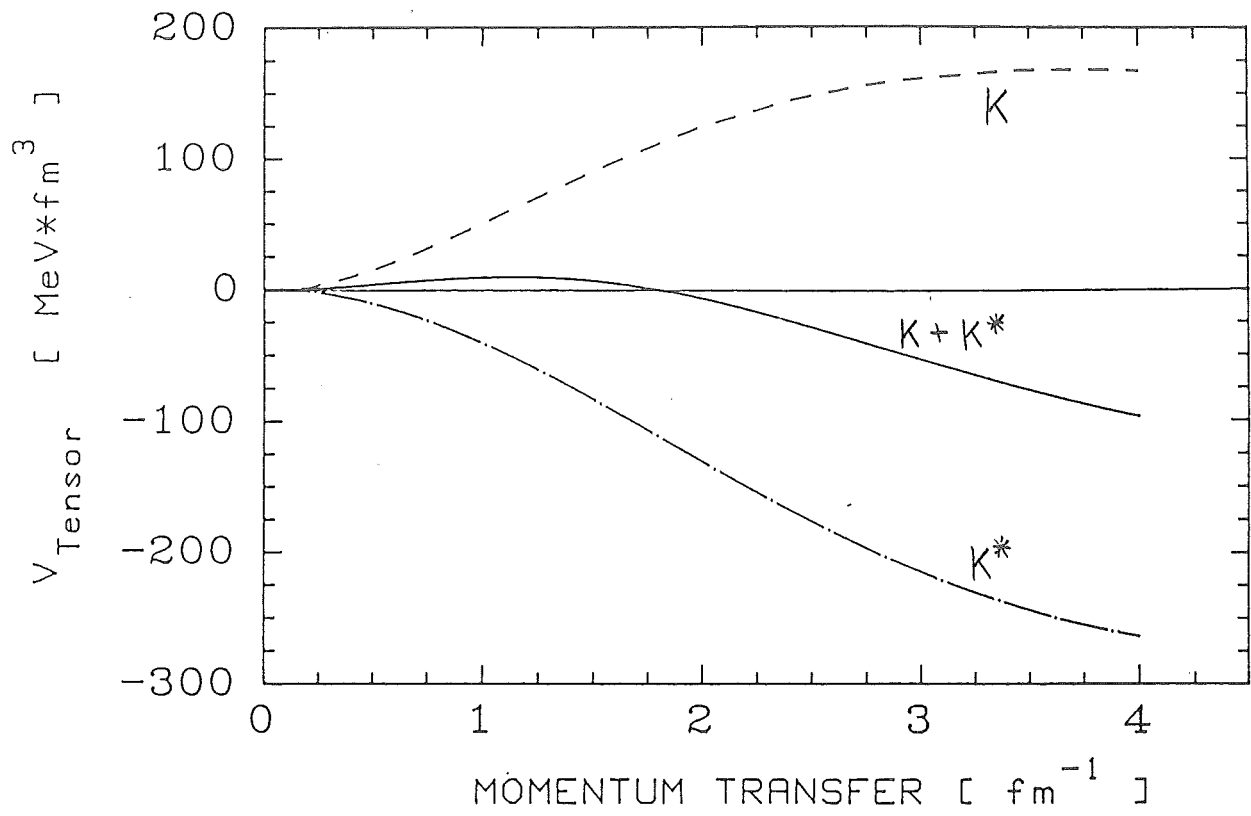


Fig.9a

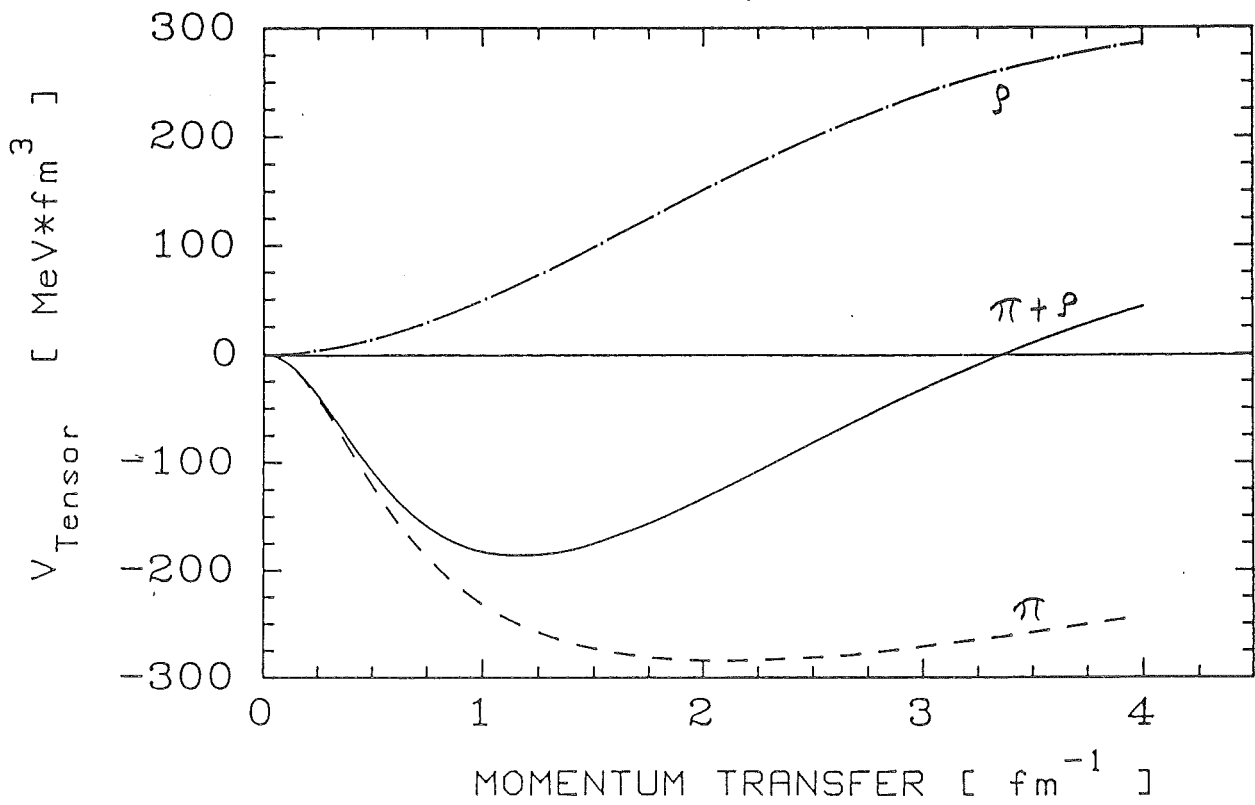


Fig. 9b

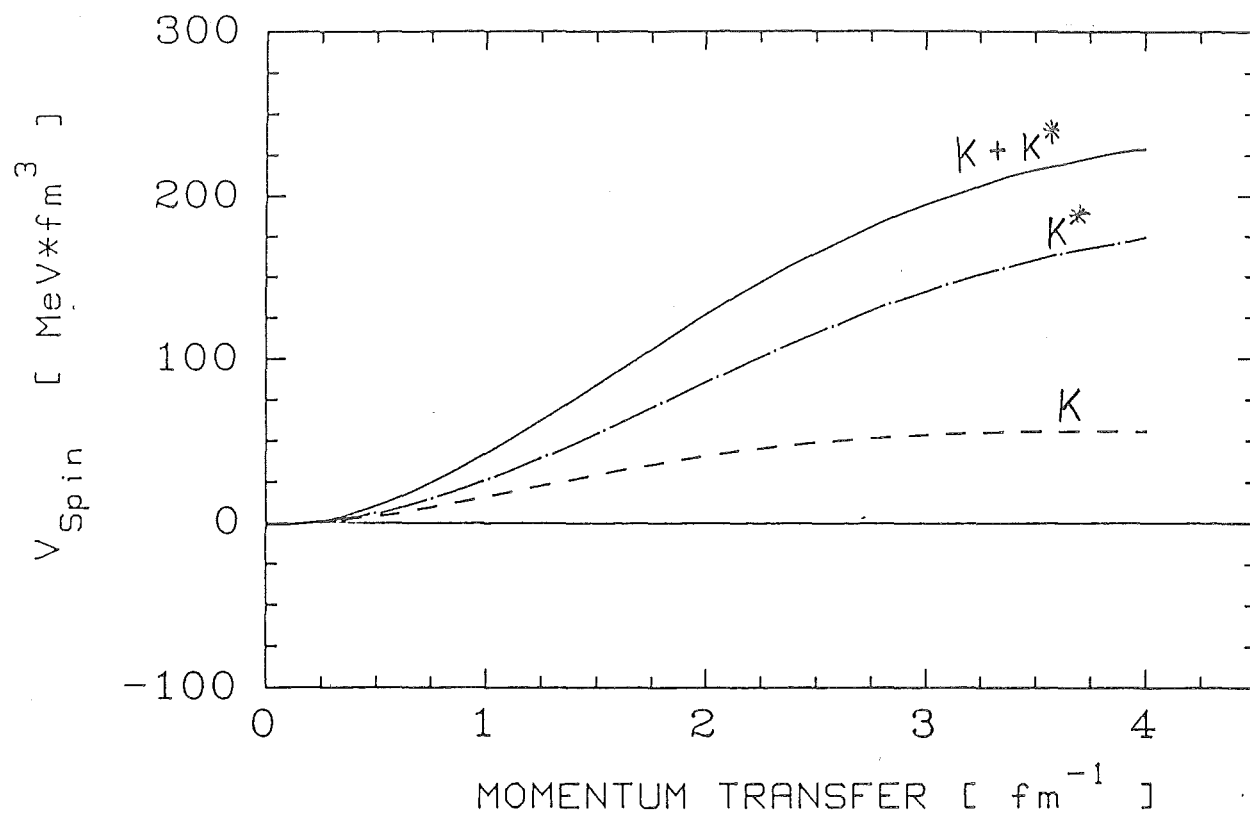


Fig. 10a

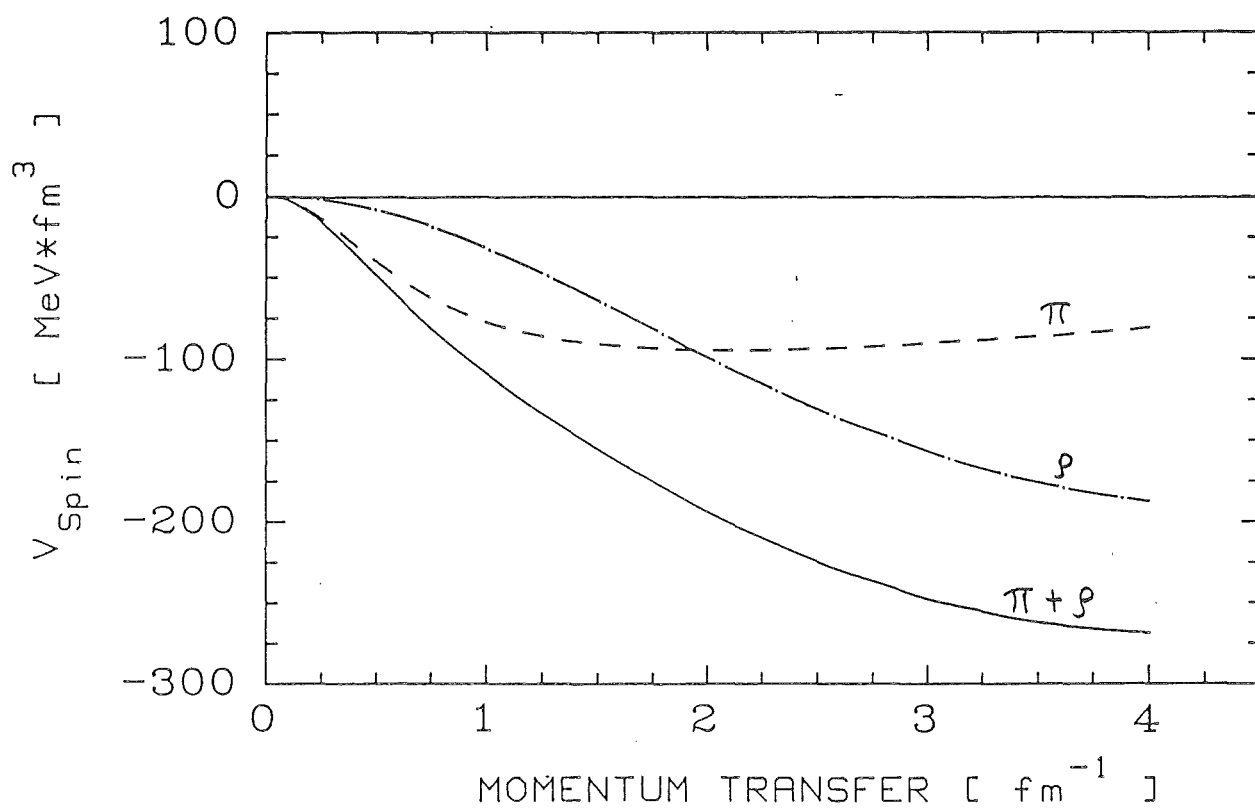


Fig. 10b

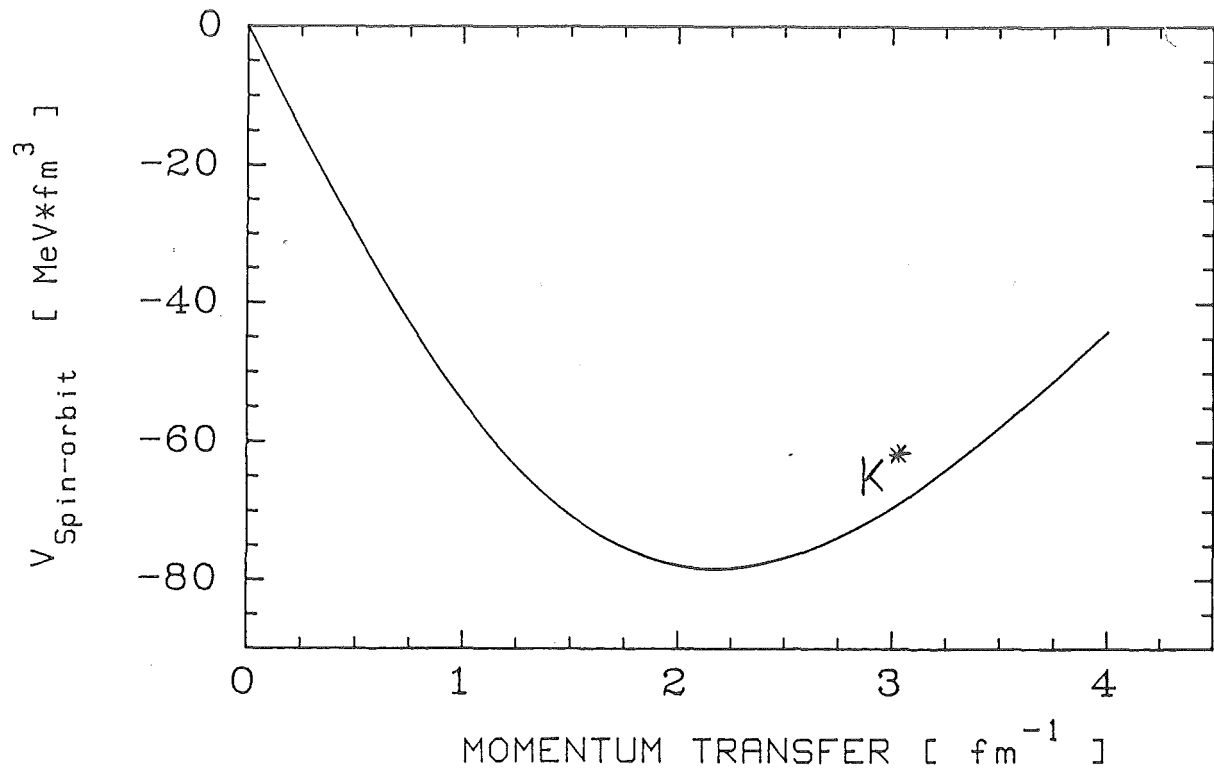


Fig. 11a

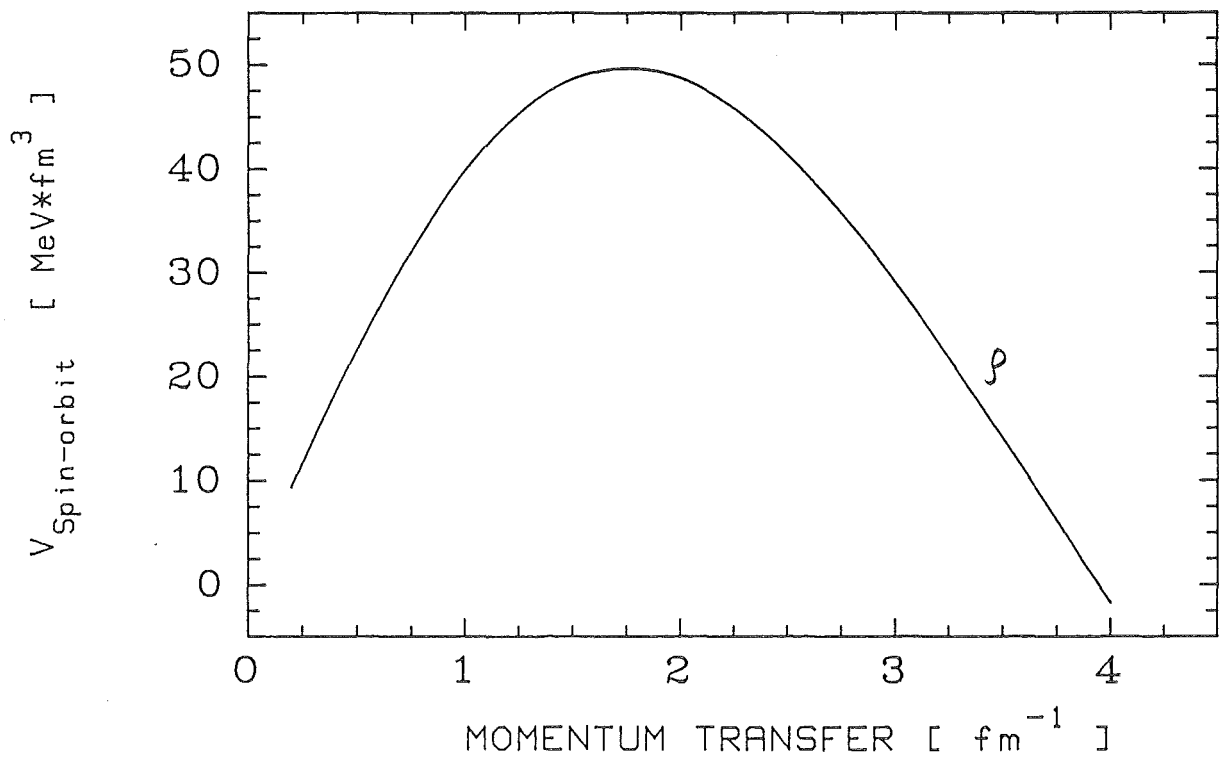


Fig. 11b

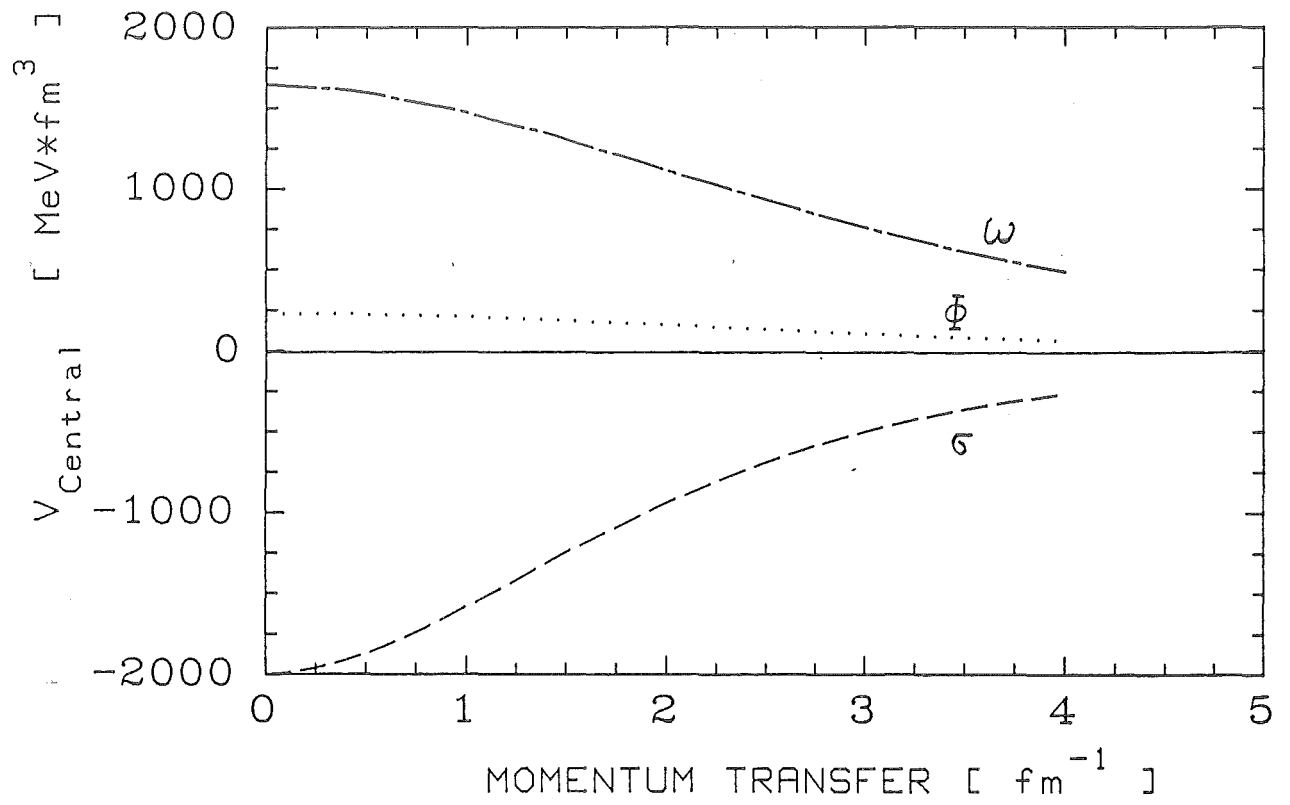


Fig. 12a

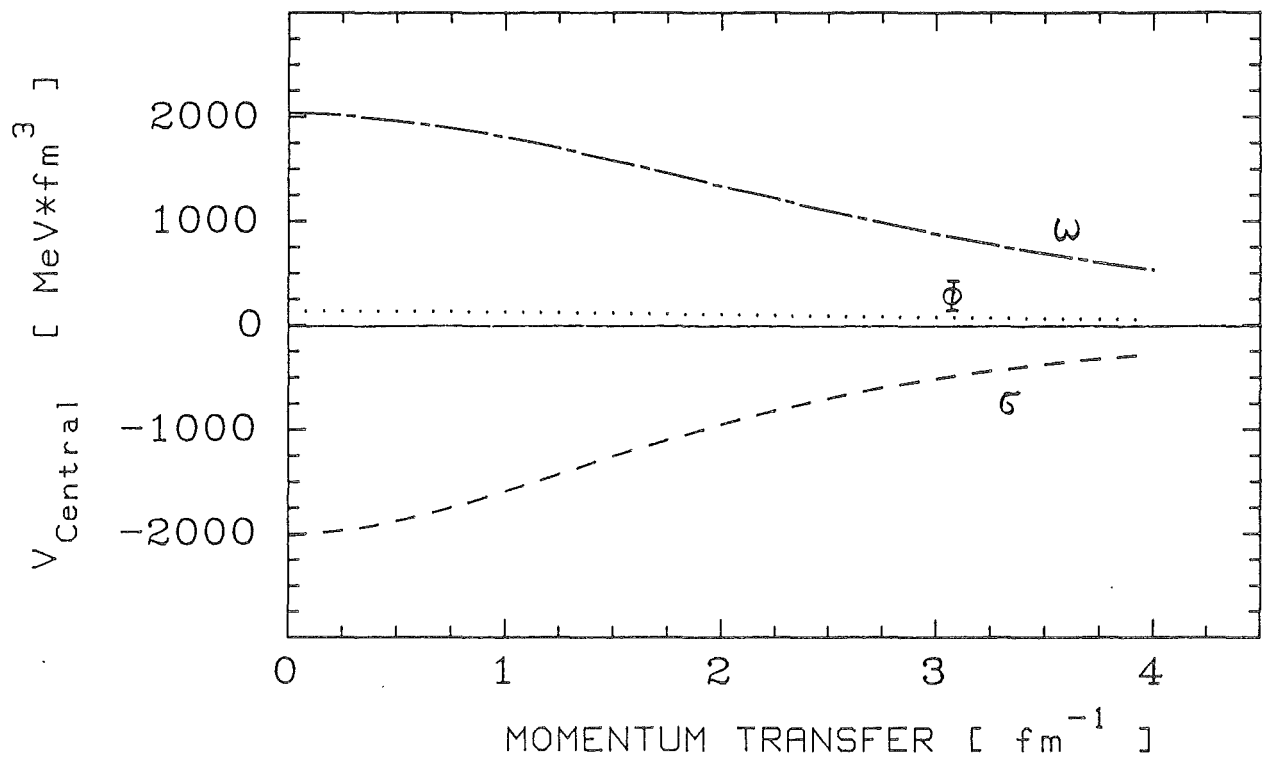


Fig. 12b

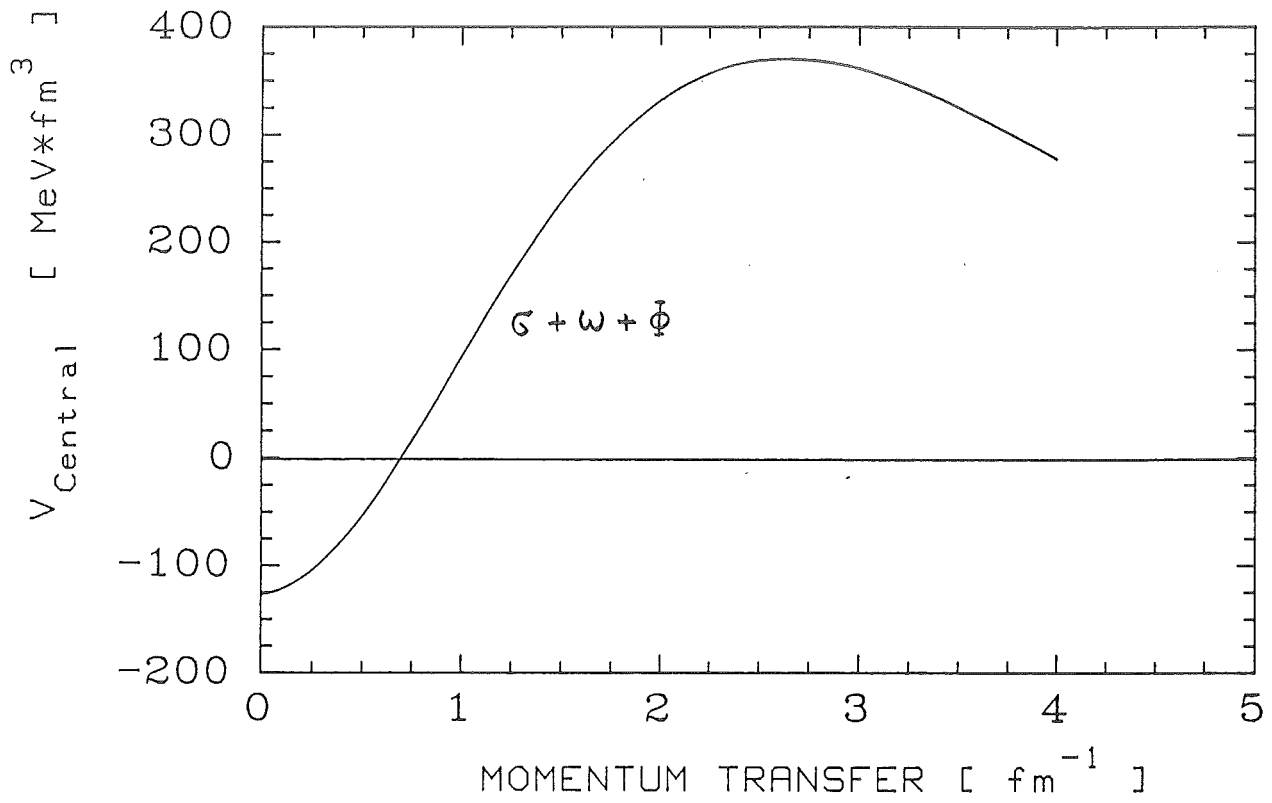


Fig. 13a

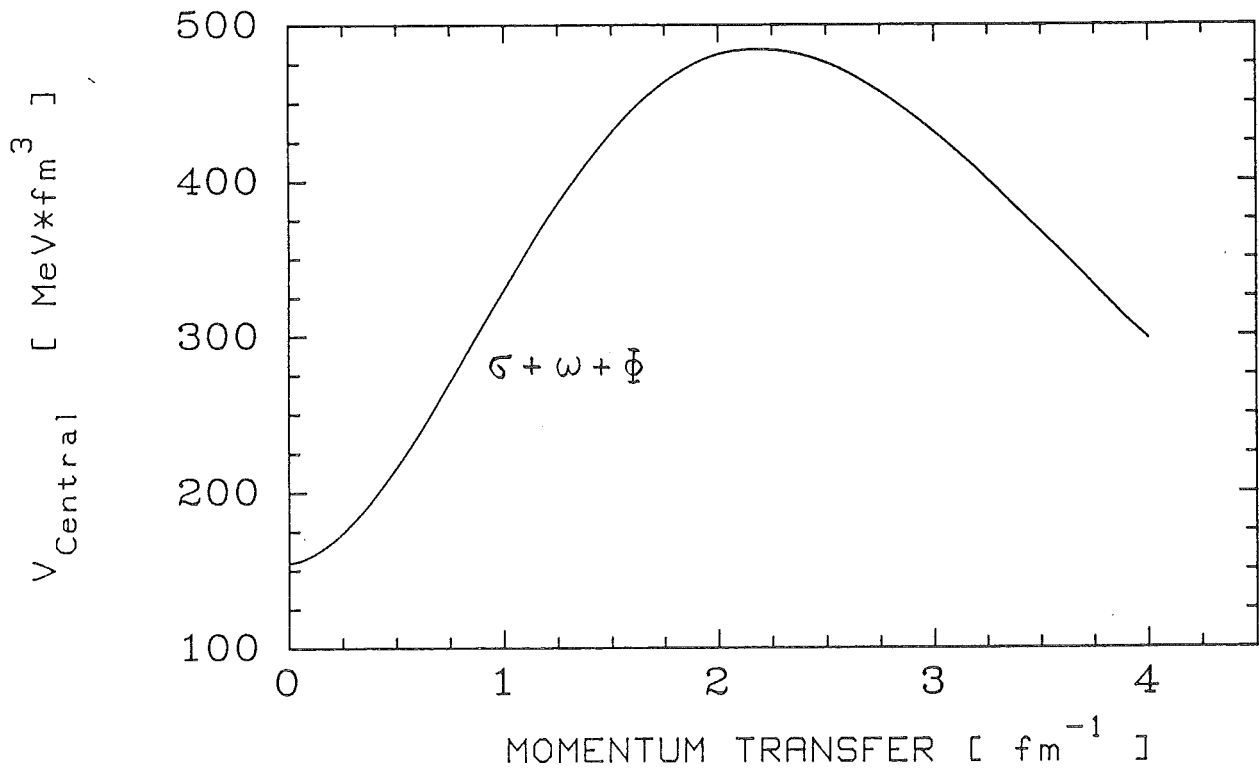


Fig. 13b

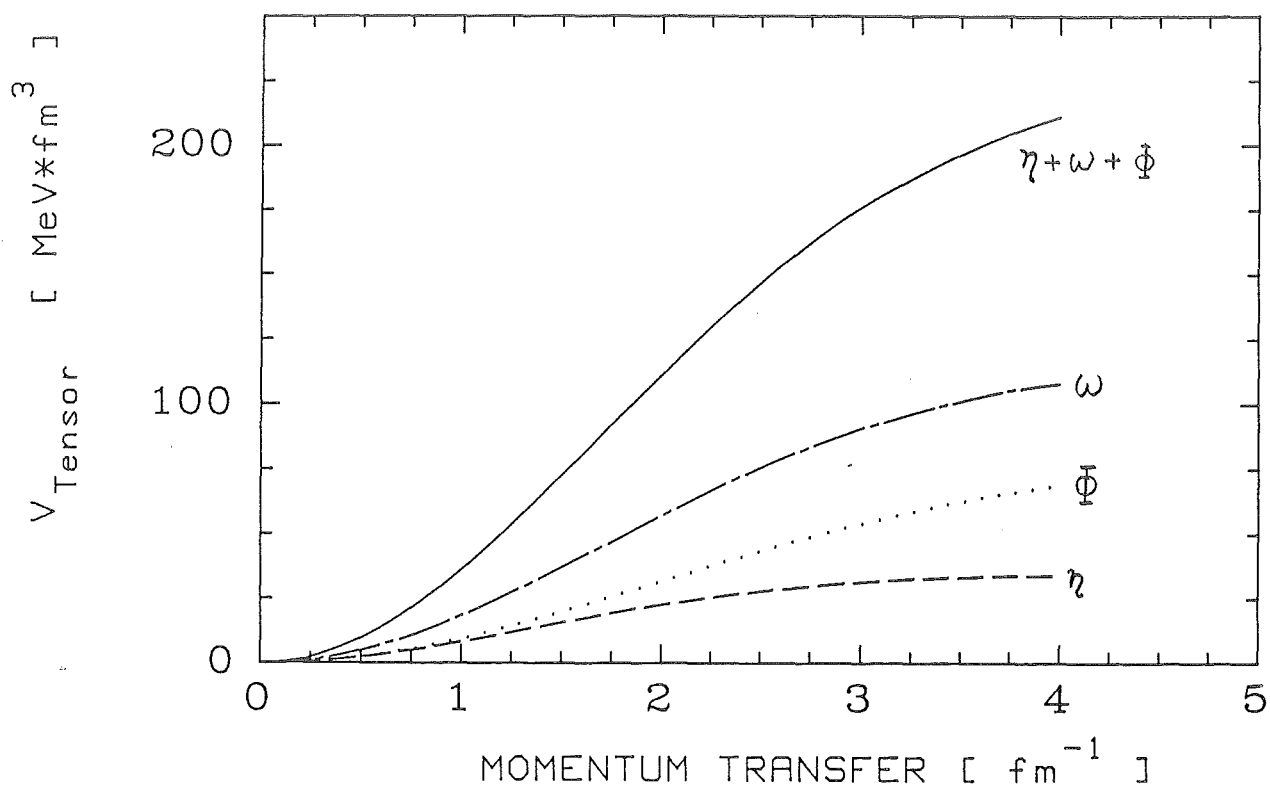


Fig. 14a

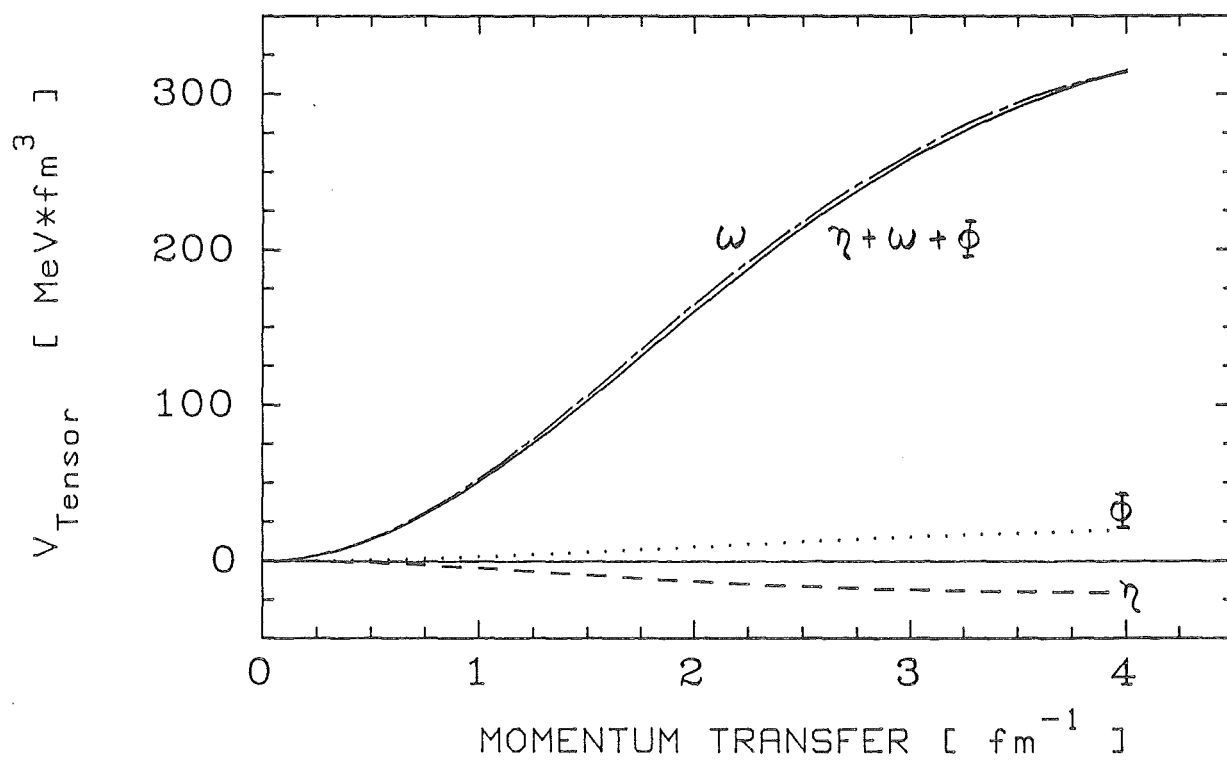


Fig. 14b

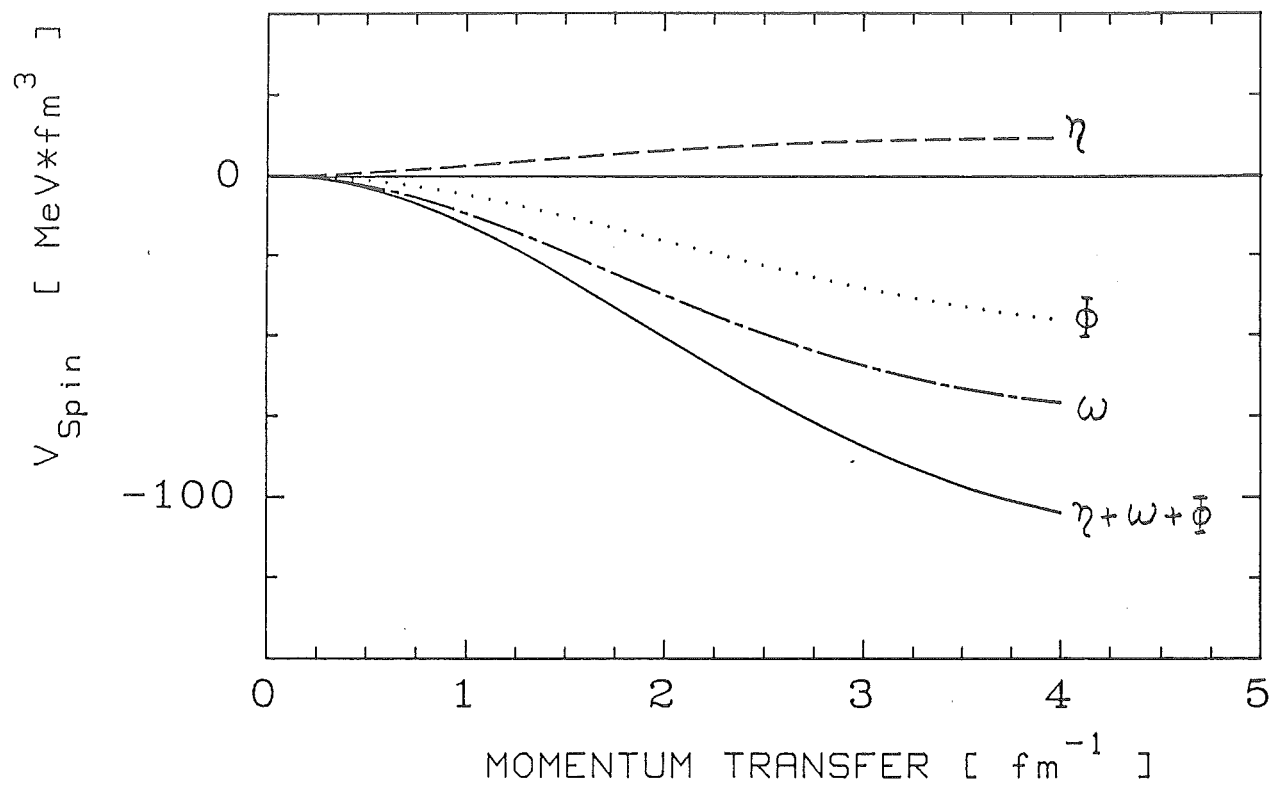


Fig. 15a

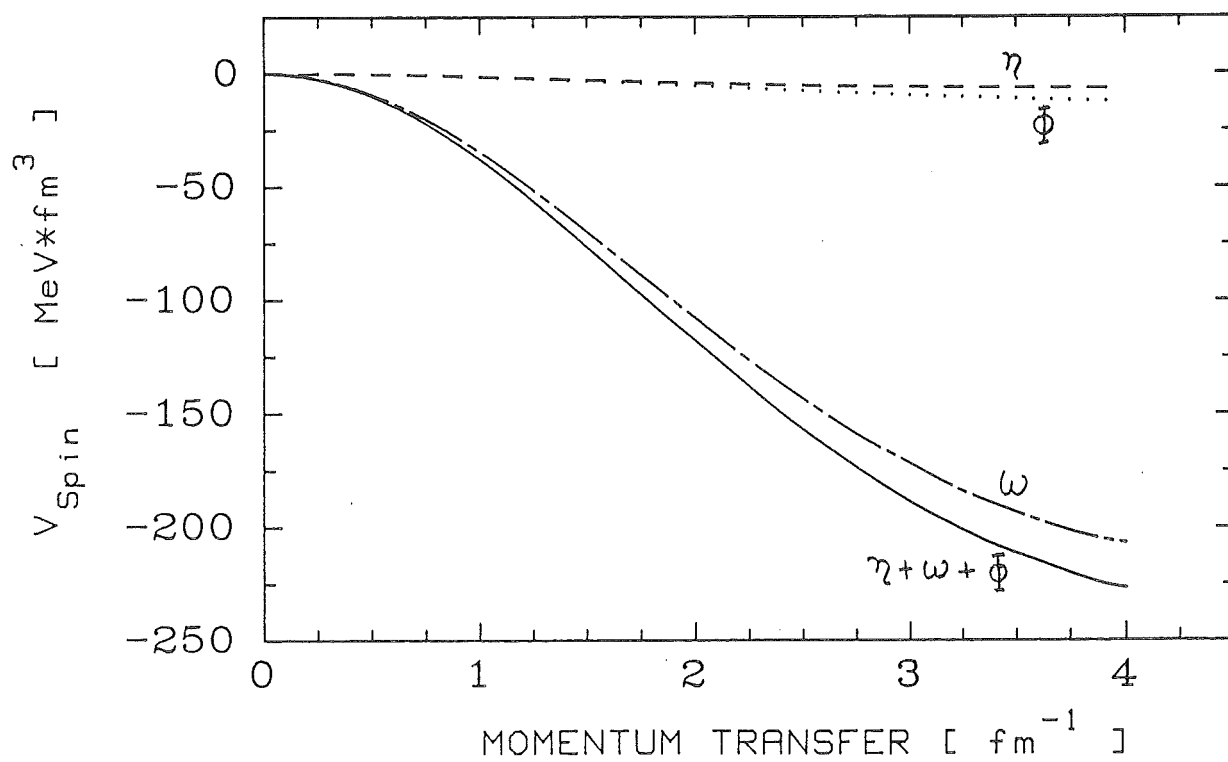


Fig. 15b

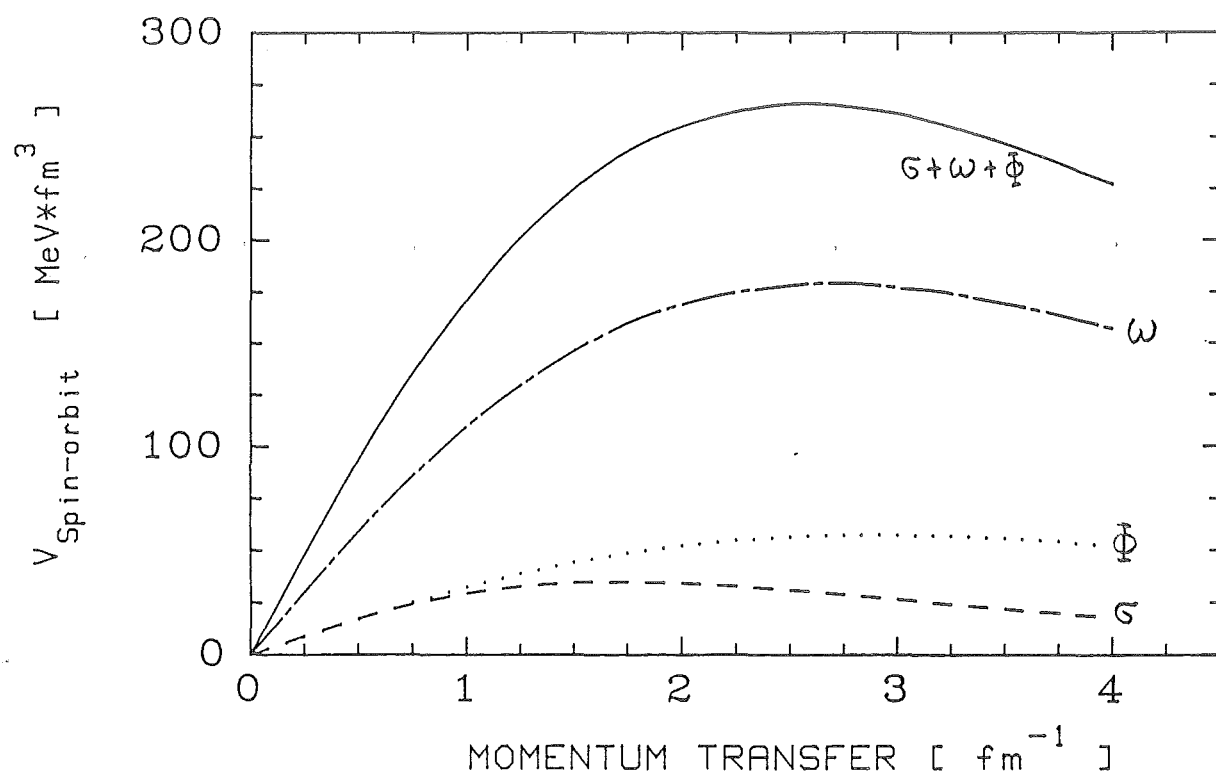


Fig. 16a

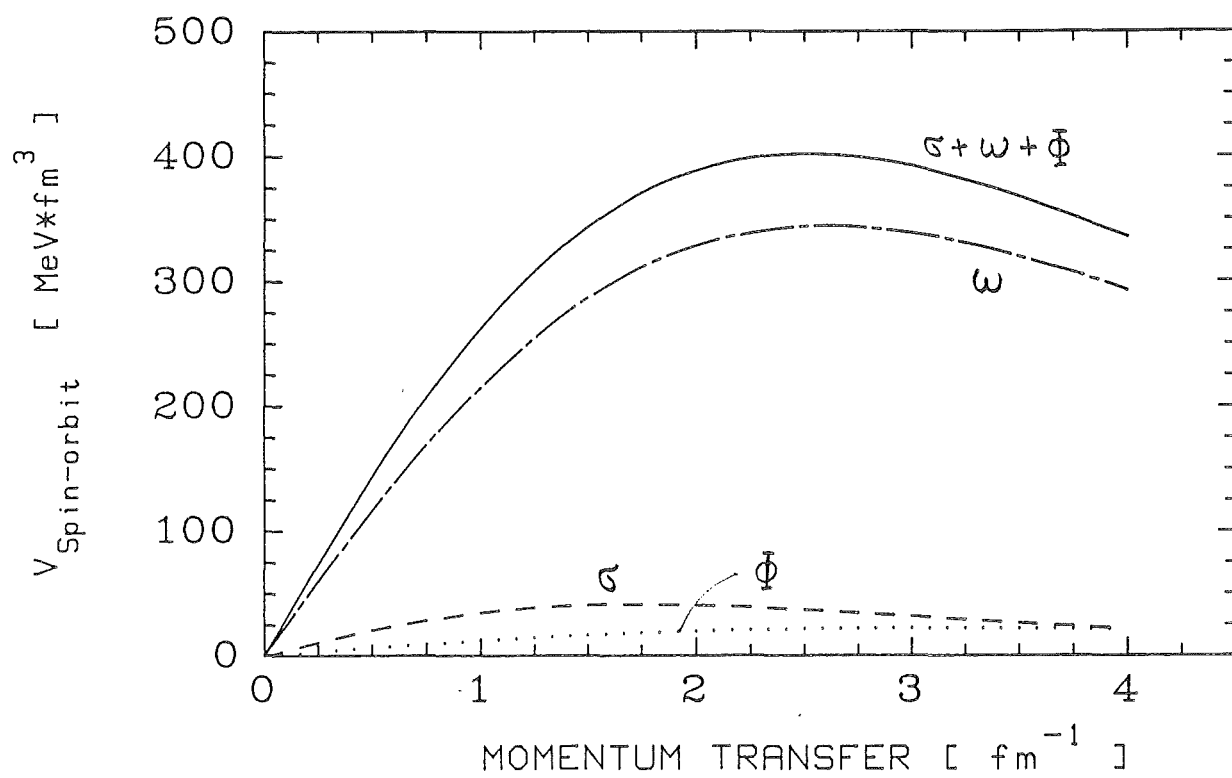


Fig. 16b

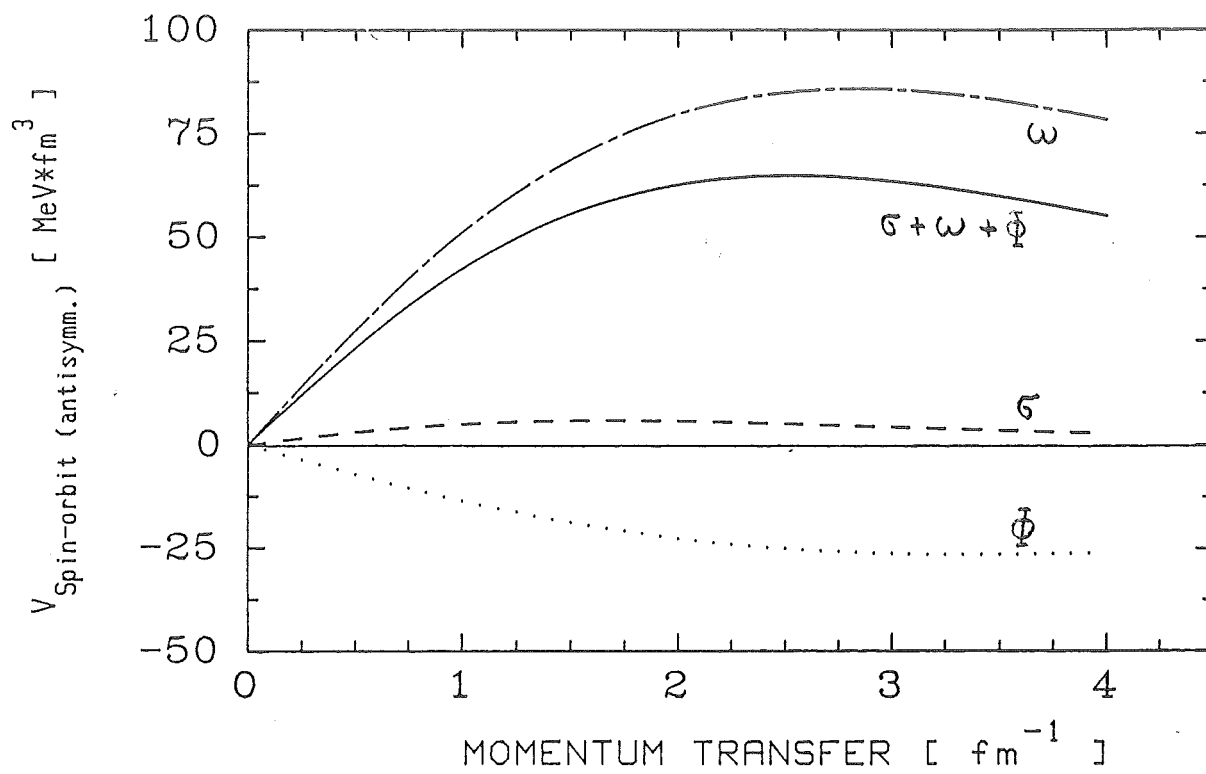


Fig. 17

3. Die Kopplungskonstanten im SU_3 -Modell

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie sich die Baryon-Baryon-Meson-Kopplungskonstanten unter der Annahme einer exakten SU_3 -Symmetrie zueinander in Beziehung setzen lassen. Eine ausführliche Behandlung des gruppentheoretischen Hintergrundes, der hier nur kurz referiert werden soll, findet man in (ROL71).

Im ersten Abschnitt wird die reguläre Darstellung einer Lie-Algebra angegeben und gezeigt, wie die Basisvektoren dieser Darstellung mit den Teilchenwellenfunktionen identifiziert werden können.

Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, auf welche Weise sich aus SU_3 -Vektoren SU_3 -invariante Skalare bilden lassen, aus denen später die Lagrangefunktion aufgebaut wird. In diesem Zusammenhang werden die wichtigen Begriffe F- und D-Kopplung auftauchen.

Der letzte Abschnitt behandelt schließlich explizit die SU_3 -invariante Lagrangefunktion. Es wird gezeigt, wie man von hier aus auf die SU_3 -Relationen zwischen den Baryon-Baryon-Meson-Kopplungskonstanten kommt.

3.1 Reguläre Darstellung einer Lie-Algebra

Allgemein spricht man von einer Darstellung einer Lie-Algebra, wenn folgender Punkt erfüllt ist:

Jedem Operator X_α einer Lie-Algebra wird eine lineare Transformation $A(X_\alpha)$ zugeordnet. Diese lineare Abbildung operiert auf Vektoren ξ eines Vektorraums:

$$A(X_\alpha)\xi_n = \sum_m A_{nm}(X_\alpha)\xi_m \quad (3.1)$$

Die Linearität von $A(X_\alpha)$ heißt:

$$A(\sum a_\alpha X_\alpha) = \sum a_\alpha A(X_\alpha) , \quad (3.2)$$

wobei a_α ein reeller oder komplexer Koeffizient ist.

Da die Operatoren der Lie-Algebra selbst einen Vektorraum aufspannen, kann man als Darstellungsraum der Algebra die Lie-Algebra selbst wählen. In diesem Fall spricht man von der regulären Darstellung. Es operiert nun die lineare Abbildung $A(X_\alpha)$ auf Elemente X_n der Lie-Algebra. Diese Abbildung wird über den Kommutator der Algebra definiert:

$$A(X_\alpha)X_n := [X_\alpha, X_n] . \quad (3.3)$$

Da der Kommutator wieder ein Element der Lie-Algebra ergibt

$$[X_\alpha, X_n] = C_{\alpha n}^m X_m , \quad (3.4)$$

findet man, daß die Matrixelemente der linearen Transformationen $A(X_\alpha)$ eindeutig durch die Strukturkonstanten der Lie-Algebra gegeben sind.

Jede lineare Abbildung ist schon bestimmt durch das Bild einer Basis des Vektorraums, in dem sie operiert. Es soll nun gezeigt werden, wie sich diese Basisvektoren mit physikalischen Teilchenwellenfunktionen* identifizieren lassen.

* Zu den Phasenfaktoren in den Wellenfunktionen vgl. (ROL71).

Als Beispiel wird die Gruppe SU_2 betrachtet. Sie hat die drei Generatoren I_+ , I_3, I_- oder, in einer anderen Kombination:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2(I_+ + I_-) \\ \frac{1}{2i}(I_+ - I_-) \\ I_3 \end{pmatrix}$$

Die Operatoren I_1, I_2, I_3 entsprechen den Pauli-Matrizen. Die drei Operatoren I_+, I_3, I_- lassen sich mit dem π -Mesonen-Isospintriplett in Beziehung setzen. Man vergleiche dazu folgende aus der Quantenmechanik bekannte Relationen:

$$\begin{aligned} I_+ (\sqrt{2} |\pi^+\rangle) &= 0 & [I_+, I_+] &= 0 \\ I_+ (|\pi^0\rangle) &= -(\sqrt{2} |\pi^+\rangle) & [I_+, I_3] &= -I_+ \\ I_+ (\sqrt{2} |\pi^-\rangle) &= 2 |\pi^0\rangle & [I_+, I_-] &= 2I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 (\sqrt{2} |\pi^+\rangle) &= \sqrt{2} |\pi^+\rangle & [I_3, I_+] &= I_+ \\ I_3 (|\pi^0\rangle) &= 0 & [I_3, I_3] &= 0 \\ I_3 (\sqrt{2} |\pi^-\rangle) &= -(\sqrt{2} |\pi^-\rangle) & [I_3, I_-] &= -I_- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_- (\sqrt{2} |\pi^+\rangle) &= -2 |\pi^0\rangle & [I_-, I_+] &= -2I_3 \\ I_- (|\pi^0\rangle) &= \sqrt{2} |\pi^-\rangle & [I_-, I_3] &= I_- \\ I_- (\sqrt{2} |\pi^-\rangle) &= 0 & [I_-, I_-] &= 0 \end{aligned}$$

Bildet man nun die Kombinationen:

$$\begin{pmatrix} |\pi_1\rangle \\ |\pi_2\rangle \\ |\pi_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi^+\rangle + |\pi^-\rangle) \\ \frac{1}{i\sqrt{2}} (|\pi^+\rangle - |\pi^-\rangle) \\ |\pi^0\rangle \end{pmatrix}$$

so lassen sich die π -Mesonen-Wellenfunktionen als Darstellungen der SU_2 -Generatoren interpretieren.

Aus der Definition der regulären Darstellung

$$A(I_j)I_k := [I_j, I_k] = i\varepsilon_{jkl}I_l$$

folgt:

$$I_j|\pi_k\rangle = i\varepsilon_{jkl}|\pi_l\rangle$$

d.h.:

d	Operator	Wellenfunktion
	I_+ wird dargestellt durch	$\sqrt{2} \pi^+\rangle$
	I_3 " " "	$ \pi^0\rangle$
	I_- " " "	$\sqrt{2} \pi^-\rangle$

Daß diese Identifikationen mit dem Isospintriplett π^+, π^0, π^- so gut funktioniert, ist natürlich nicht zufällig, denn die reguläre Darstellung der allgemeinen Gruppe SU_n hat die Dimension n^2-1 , im Falle der SU_2 ist sie somit dreidimensional. Man braucht daher ein Isospintriplett als Basis der regulären Darstellung.

Für die Gruppe SU_3 lassen sich analoge Schritte durchführen. Man hat dort die acht Generatoren (GRE79)

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

die man oft auch als

$$F_\alpha = \frac{1}{2} \lambda_\alpha \quad (\alpha=1,\dots,8) \tag{3.6}$$

angibt. Man spricht dann vom F-Spin in Analogie zum Spin $s_i = \frac{1}{2} \sigma_i$ ($i=1,\dots,3$).

Die 8 Generatoren F_α werden zunächst wieder durch Schiebeoperatoren ausgedrückt. (Man hat in der SU_3 I-,V-,U-Schiebeoperatoren, die in drei Richtungen verschieben (vgl. Fig. 18). Zur Definition dieser Operatoren siehe (GRE79).)

$$(F_\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (I_+ + I_-) \\ \frac{1}{2i} (I_+ - I_-) \\ I_3 \\ \frac{1}{2} (V_+ + V_-) \\ \frac{1}{2i} (V_+ - V_-) \\ \frac{1}{2} (U_+ + U_-) \\ \frac{1}{2i} (U_+ - U_-) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Die acht Generatoren $I_+, I_-, I_3, V_+, V_-, U_+, U_-, Y$ lassen sich in analoger Weise mit den Wellenfunktionen eines SU_3 -Oktetts in Beziehung setzen. Dazu vergleicht man wieder mit den Kommutatoren. Als Beispiel sei die Wirkung von I_+ auf das Baryon-Oktett betrachtet.

$$\begin{aligned}
 I_+ (\sqrt{2}|\Sigma^+\rangle) &= 0 & [I_+, I_+] &= 0 \\
 I_+ (\sqrt{2}|p\rangle) &= 0 & [I_+, V_+] &= 0 \\
 I_+ (\sqrt{2}|n\rangle) &= \sqrt{2}|p\rangle & [I_+, U_+] &= V_+ \\
 I_+ (\sqrt{2}|\Sigma^-\rangle) &= |\Sigma^0\rangle & [I_+, I_-] &= I_3 \\
 I_+ (|\Sigma^0\rangle) &= \sqrt{2}|\Sigma^+\rangle & [I_+, I_3] &= I_+ \\
 I_+ (|\Lambda\rangle) &= 0 & [I_+, Y] &= 0 \\
 I_+ (\sqrt{2}|\Xi^-\rangle) &= \sqrt{2}|\Xi^-\rangle & [I_+, V_-] &= U_- \\
 I_+ (\sqrt{2}|\Xi^-\rangle) &= 0 & [I_+, U_-] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

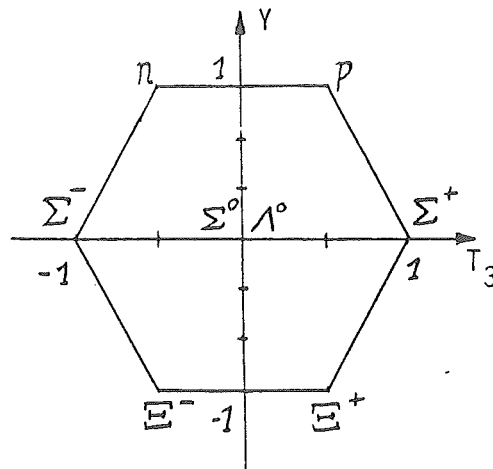
Ebenso vergleicht man die Wirkungen der anderen Generatoren auf das Baryonenoktett mit den entsprechenden Kommutatoren und findet aufgrund der Definition des Kommutators:

$$[F_\alpha, F_\beta] = i f_{\alpha\beta\gamma} F_\gamma \tag{3.9}$$

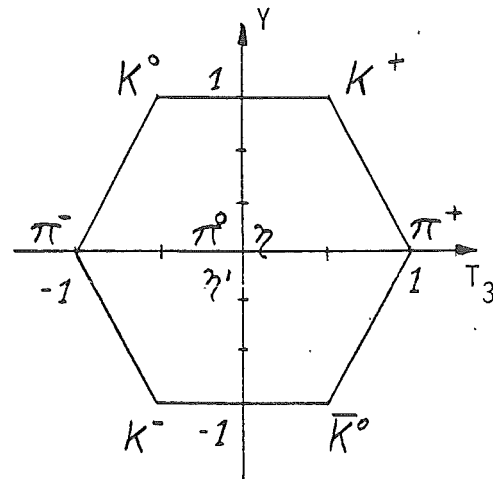
Operator	Wellenfunktion
I_+ wird dargestellt durch	$\sqrt{2} \Sigma^+\rangle$
I_- " " "	$\sqrt{2} \Sigma^-\rangle$
I_3 " " "	$ \Sigma^0\rangle$
V_+ " " "	$\sqrt{2} p\rangle$
V_- " " "	$\sqrt{2} \Xi^-\rangle$
U_+ " " "	$\sqrt{2} n\rangle$
U_- " " "	$\sqrt{2} \Xi^0\rangle$
Y " " "	$ \Lambda\rangle$

Damit lauten die acht Basiswellenfunktionen (sie seien mit $|B_1\rangle, \dots, |B_8\rangle$ bezeichnet wegen der Wahl des Baryon-Oktetts)

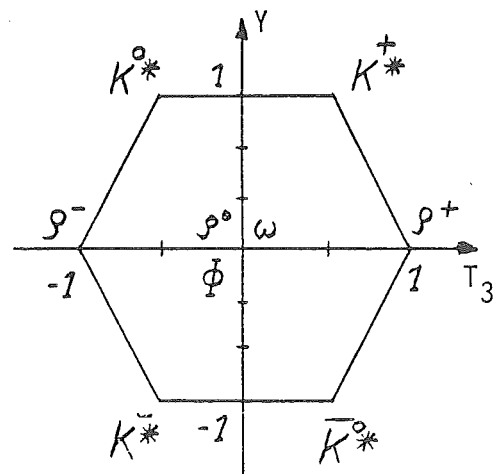
$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Sigma^+\rangle + |\Sigma^-\rangle) \\ B_2 &= \frac{1}{i\sqrt{2}} (|\Sigma^+\rangle - |\Sigma^-\rangle) \\ B_3 &= |\Sigma^0\rangle \\ B_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle + |\Xi^-\rangle) \\ B_5 &= \frac{1}{i\sqrt{2}} (|p\rangle - |\Xi^-\rangle) \\ B_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|n\rangle + |\Xi^0\rangle) \\ B_7 &= \frac{1}{i\sqrt{2}} (|n\rangle - |\Xi^0\rangle) \\ B_8 &= |\Lambda\rangle \end{aligned} \tag{3.10}$$



$$J^P = \frac{1}{2}^+$$



$$J^P = 0^-$$



$$J^P = 1^-$$

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3$$

$$Y = B + S$$

Q: Ladung

Y: Hyperladung

T_3 : Isospin 3-Komponente

B: Baryonenzahl

S: Strangeness

Fig.18: SU_3 - Multipletts der Baryonen und Mesonen

3.2 Konstruktion von SU_3 -invarianten Skalaren

Die Lagrangefunktion soll eine SU_3 -invariante skalare Funktion sein und sie soll die Kopplungen der Baryon-Baryon-Meson-Vertices beschreiben. Schließt man die Baryonen des Dekupletts ($\Delta, Y^*, \Xi^*, \Omega^-$) zunächst aus dieser Betrachtung aus, so hat man drei achtdimensionale SU_3 -Darstellungen (zwei Baryon-, ein Meson-Oktett) zu einem SU_3 -invarianten Skalar zu koppeln.

Sei zunächst wieder die Drehgruppe SU_2 betrachtet. Wie lassen sich dort drei SU_2 -Vektoren zu einem Skalar koppeln? Diese Konstruktion ist nur in einer einzigen Weise möglich. Man bildet zunächst mit Hilfe des ϵ -Tensors (Strukturkonstanten der SU_2) aus zwei Vektoren einen dritten

$$\epsilon_{ijk} a^i b^j$$

und multipliziert diesen skalar mit einem weiteren

$$\epsilon_{ijk} a^i b^j c^k .$$

Die SU_3 unterscheidet sich hier grundlegend von der SU_2 , denn in der SU_3 hat man nicht nur den vom Kommutator

$$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] = 2if_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\gamma \quad (3.11)$$

her kommenden antisymmetrischen Tensor $f_{\alpha\beta\gamma}$, sondern zusätzlich den vom Antikommutator

$$\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta\} = \frac{4}{3} \delta_{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1} + 2d_{\alpha\beta\gamma} \lambda_\gamma \quad (3.12)$$

her kommenden symmetrischen Tensor $d_{\alpha\beta\gamma}^*$.

Man kann also hier auf zwei verschiedene Weisen aus zwei Vektoren einen dritten bilden:

$$f_{\alpha\beta\gamma} b_{\beta} c_{\gamma}$$

$$d_{\alpha\beta\gamma} b_{\beta} c_{\gamma}$$

Diese beiden Größen sind SU_3 -Vektoren. Um dies zu beweisen, wird gezeigt, daß

$$F := f_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} \quad (3.13)$$

$$D := d_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} \quad (3.14)$$

SU_3 -invariante Skalare sind für beliebige Vektoren a . Dazu werde zunächst jedem SU_3 -Vektor eine 3×3 Matrix zugeordnet durch die Definition

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_{\alpha} a_{\alpha} . \quad (3.15)$$

Nun läßt sich die Größe F (3.13) schreiben als

$$F = \frac{1}{4i} \text{Sp}([\lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta}] \cdot \lambda_{\gamma}) a_{\alpha} b_{\beta} c_{\gamma} , \quad (3.16)$$

denn

$$[\lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta}] = 2if_{\alpha\beta\gamma} \lambda_{\gamma}$$

$$[\lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta}] \cdot \lambda_{\gamma} = 2if_{\alpha\beta\gamma} \lambda_{\gamma} \lambda_{\gamma}$$

$$\text{Sp}([\lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta}] \cdot \lambda_{\gamma}) = 2if_{\alpha\beta\gamma} \underbrace{\text{Sp}(\lambda_{\gamma} \cdot \lambda_{\gamma})}_{\text{Sp}(\lambda_{\alpha}, \lambda_{\beta}) = 2\delta_{\alpha\beta}} = 4if_{\alpha\beta\gamma}$$

* Dem Antikommutator (3.12) entspricht in der SU_2 die Relation:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$$

In analoger Weise läßt sich die Größe D (3.14) schreiben als

$$D = \frac{1}{4} \text{Sp}(\{\lambda_\alpha, \lambda_\beta\} \lambda_\gamma) a_\alpha b_\beta c_\gamma. \quad (3.17)$$

Mit der Definition (3.15) wird aus F und D:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp}(ABC - BAC) \quad (3.18)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp}(ABC + BAC) \quad (3.19)$$

Da die Spuren unitär invariant sind, sind die Größen F und D SU_3 -invariante Skalare.

Es sind somit zwei SU_3 -Skalare gefunden worden. Man nennt die Kopplung mit dem F-Tensor auch F-Kopplung, die mit dem D-Tensor D-Kopplung.

Aus den Größen F, D wird die Lagrange-Funktion aufgebaut. Dazu werden nach der Definition (3.15) die Matrizen A, B, C gebildet durch die Basisvektoren des Baryon-Oktetts bzw. des Meson-Oktetts*.

Man erhält beispielsweise für das 0^- -Meson-Oktett

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3} \Sigma^0 + \bar{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \bar{\Sigma}^- & -\bar{\Xi}^0 \\ \bar{\Sigma}^+ & -\sqrt{3} \bar{\Sigma}^0 + \bar{\Lambda} & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda} \end{pmatrix}; \quad B = (\bar{B})^+ \quad (3.20)$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3} \pi^0 + \eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{-\sqrt{3} \pi^0 + \eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

* Die Meson-Basisvektoren, die (3.10) entsprechen, erhält man einfach durch Vertauschen der entsprechenden Teilchen (Fig. 18).

3.3 Die SU_3 -Kopplungskonstanten

Die aus den Matrizen (3.20) und (3.21) gebildeten Skalare F,D lauten:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp}(\bar{B}MB - \bar{B}BM)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp}(\bar{B}MB + \bar{B}BM)$$

Die SU_3 -invariante Lagrange-Funktion wird allgemein angesetzt als die Summe aus F-Kopplung und D-Kopplung:

$$\mathcal{L} = \sqrt{2} g \{ \alpha(\text{Sp}(\bar{B}MB) - \text{Sp}(\bar{B}BM)) + (1-\alpha)(\text{Sp}(\bar{B}MB) + \text{Sp}(\bar{B}BM)) \} \quad (3.22)$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ dient der Normierung, die Größe g beschreibt die SU_3 -Kopplungskonstante, zu der später alle Baryon-Baryon-Meson-Kopplungskonstanten in Relation gesetzt werden. Die Größe α steht für das Mischungsverhältnis zwischen F- und D-Kopplung.

$$\alpha = \frac{F}{F+D} \quad (3.23)$$

Für $\alpha=1$: Reine F-Kopplung

Für $\alpha=0$: Reine D-Kopplung

Die Lagrange-Funktion läßt sich umschreiben in:

$$\mathcal{L} = \sqrt{2} g \{ \text{Sp}(\bar{B}MB) + (1-2\alpha)\text{Sp}(\bar{B}BM) \} \quad (3.24)$$

In (3.24) müssen die Matrizen (3.20), (3.21) eingesetzt und die Spuren gebildet werden. Anschließend werden die Terme gleicher Kopplung miteinander verglichen. An einem Beispiel soll dies gezeigt werden:

Für die $\Lambda\Sigma\pi$ -Kopplung erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Lambda\Sigma\pi} &= \sqrt{2} \, g \, \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{\Lambda}\Sigma^0\pi^0 + \bar{\Sigma}^0\Lambda\pi^0 + \bar{\Lambda}\Sigma^-\pi^+ + \bar{\Sigma}^-\Lambda\pi^- + \bar{\Sigma}^+\Lambda\pi^+ + \bar{\Lambda}\Sigma^+\pi^-) \right. \\ &\quad \left. + (1-2\alpha) \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{\Sigma}^0\Lambda\pi^0 + \bar{\Lambda}\Sigma^0\pi^0 + \bar{\Lambda}\Sigma^+\pi^- + \bar{\Sigma}^-\Lambda\pi^- + \bar{\Sigma}^+\Lambda\pi^+ + \bar{\Lambda}\Sigma^-\pi^+) \right\} \\ g_{\Lambda\Sigma\pi} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \, g(1-\alpha)\end{aligned}$$

In analoger Weise erhält man alle weiteren Baryon-Baryon-Meson-Kopplungen in Abhängigkeit von g . Die Resultate sind:

$$\begin{aligned}g_{\Lambda\Sigma\pi} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \, g(1-\alpha) , & g_{\Sigma\Sigma\pi} &= 2g\alpha \\ g_{NN\eta} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \, g(4\alpha-1) , & g_{\Xi\Xi\eta} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \, g(1+2\alpha) \\ g_{\Sigma\Sigma\eta} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \, g(1-\alpha) , & g_{N\Lambda K} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \, g(1+2\alpha) \\ g_{\Xi\Lambda K} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \, g(4\alpha-1) , & g_{\Lambda\Lambda\eta} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \, g(1-\alpha) \\ g_{\Xi\Xi\pi} &= -g(1-2\alpha) , & g_{NN\pi} &= g \\ g_{\Sigma NK} &= g(1-2\alpha) , & g_{\Sigma\Xi K} &= -g\end{aligned} \tag{3.25}$$

Bildet man in (3.24) die Matrix M aus den 1^- Mesonen, dann erhält man die entsprechenden Relationen für die Vektor-Vektor- bzw. Tensor-Tensor-Kopplungen.

Die in den Rechnungen verwendeten Kopplungskonstanten sind in folgender Tabelle zusammengefaßt. Sie wurden übernommen aus den SU_3 -Rechnungen von Nagels (NAG75).

	$\Lambda\Sigma\pi$	ΛNK	ΣNK	$\Lambda\Lambda\eta$	$NN\pi$	$NN\eta$
$g/\sqrt{4\pi}$	2.18	-4.16	0.11	-1.36	3.66	2.73

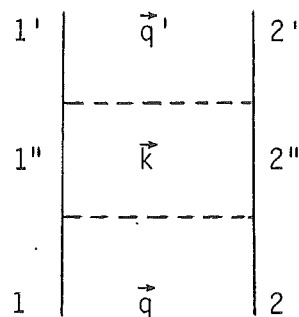
	$\Lambda\Sigma\rho$	ΛNK^*	ΣNK^*	$\Lambda\Lambda\phi$	$\Lambda\Lambda\omega$	$MM\rho$	$NN\phi$	$NN\omega$
$g/\sqrt{4\pi}$	0	-1.03	-0.59	-1.96	2.78	0.59	-1.12	3.37
$f/\sqrt{4\pi}$	3.7	-4.64	1.6	-4.3	-0.34	4.82	-0.51	2.34

Die Baryon-Baryon- σ -Kopplungskonstante hat in den Rechnungen den Wert $g/\sqrt{4\pi} = \sqrt{5}$. Bei der Berücksichtigung der zusätzlichen Σ -Boxen wurde diese Kopplung auf $\sqrt{4}$ reduziert.

4. Das Lambda-Nukleon-System

Die Behandlung der Lambda-Nukleon-Streuung erfolgt im Rahmen der nicht-kovarianten Störungstheorie. Es soll in diesem Kapitel untersucht werden, inwieweit sich relativistische Effekte, die in den Ortsraumrechnungen vernachlässigt werden, und mesonische Freiheitsgrade in den Übergangspotentialen und in den Streuphasen bemerkbar machen. Dazu wird die Reaktionsmatrixgleichung für den Isospin $1/2$ -Kanal berechnet. Diese Gleichung lautet im CM-System*:

$$R(\vec{q}', \vec{q} | z) = V(\vec{q}', \vec{q}) - P \int d^3k V(\vec{q}', \vec{k}) \frac{1}{E_k - z} R(\vec{k}, \vec{q} | z) \quad (4.1)$$



Hier bezeichnet z die Startenergie

$$z = E_1(\vec{q}) + E_2(\vec{q}) \quad (E_i(\vec{q}) = \sqrt{M_i^2 + \vec{q}^2})$$

und E_k die Gesamtenergie des Zwischenzustands

$$E_k = E_{1''}(\vec{k}) + E_{2''}(\vec{k}) \quad (E_{i''}(\vec{k}) = \sqrt{M_{i''}^2 + \vec{k}^2})$$

Der Einfluß eines virtuellen Σ -Baryon-Zwischenzustandes in der Iteration wird berücksichtigt durch die Addition von zusätzlichen Σ -Boxen, die im nächsten

* Die z -Abhängigkeit der R -Matrix wird im weiteren der Einfachheit halber unterdrückt.

Abschnitt erläutert werden, d.h. das Potential $V(\vec{q}', \vec{q})$ in (4.1) ist zu verstehen als Summe aus dem Ein-Boson-Austausch und den Zwei-Boson-Austauschpotentialen.

Das ΛN -System wird im folgenden für drei verschiedene Fälle berechnet. Die sich daraus ergebenden physikalischen Unterschiede sollen miteinander verglichen und diskutiert werden. Der Ausgangspunkt der Rechnungen ist

- a) die relativistische Behandlung der ΛN -Streuung.
- Die Ein-Boson-Austauschpotentiale werden unter Mitnahme sämtlicher Nichtlokalitäten berechnet.
 - Die relativistischen Propagatoren haben in der nicht-kovarianten Störungstheorie die Form:

$$g_{\text{OBE}}(z, \vec{k}) \sim \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{z - E_1' - E_2' - \omega} + \frac{1}{z - E_1 - E_2 - \omega} \right). \quad (4.2)$$

Hierbei ist \vec{k} der Dreierimpuls des ausgetauschten Mesons, $\omega = (\vec{k}^2 + m^2)^{1/2}$ die Meson-Energie, $E_i = \sqrt{\vec{q}_i^2 + M_i^2}$ die Baryon-Energie und z die Summe der Eingangsenergien (vgl. Fig. 19).

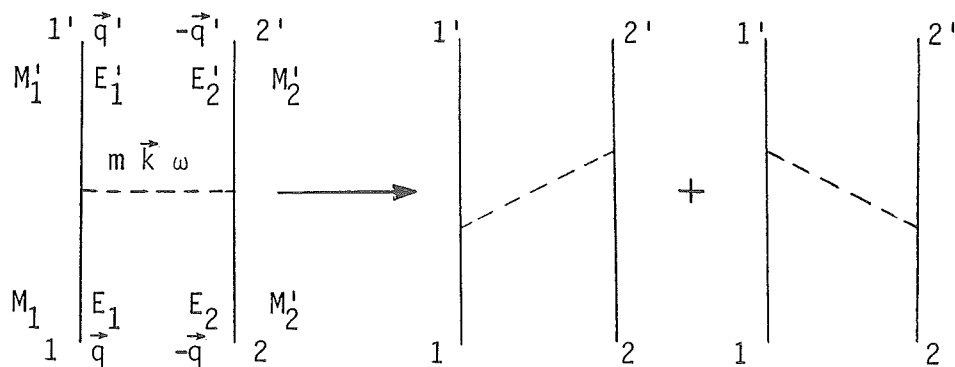


Fig.19: Zur Erläuterung der Formel (4.2)

Die beiden Terme in Gl. (4.2) entsprechen den beiden zeitgeordneten Graphen in Figur 19. Außerdem sind in den Rechnungen die entsprechenden Austauschgraphen - sie wurden bereits in Kap. 2.2.3 behandelt - und durch die Verwendung der physikalischen Massen der Teilchen auch die sog. Selbstenergieterme enthalten.

b) Die Behandlung der ΛN -Streuung mit statischen Propagatoren.

Dieser Punkt beinhaltet einen ersten Näherungsschritt:

- In den Propagatoren der OBE-Potentiale wird die Abhängigkeit von den Baryonenergien (Retardierungsterme) vernachlässigt, d.h. aus der Formel (4.2) wird

$$g_{\text{OBE}}(\vec{k}) \sim -\frac{1}{\omega^2} = -\frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} \quad (4.3)$$

Dieses Ergebnis entspricht für die Spin-0-Mesonen genau dem nicht-relativistischen Propagator der Klein-Gordon-Gleichung.

- In der Greenfunktion der Streugleichung $g(\vec{k}, z) = \frac{1}{E_k - z}$ werden die Energieurwurzeln entwickelt:

$$E_i = \sqrt{\vec{q}_i^2 + M_i^2} \sim M_i + \frac{\vec{q}_i^2}{2M_i}$$

Für das ΛN -System erhält man daraus:

$$g(\vec{k}) \sim \frac{2M_N M_\Lambda}{M_N + M_\Lambda} \cdot \frac{1}{\vec{k}^2 - \vec{q}^2} \quad (4.4)$$

Diese Näherung der Greenfunktion ist nur für kleine Zwischenzustandsenergien gut. Denn die Entwicklung der Energien hat zur Voraussetzung, daß $q_f^2 \ll M_f^2$. Für die Startenergie läßt sich diese Bedingung erfüllen, für die Zwischenzustandsenergie jedoch nicht. Denn in der R-Matrixgleichung wird über die Energie des Zwischenzustands integriert. Es wird damit in jedem Fall der Punkt erreicht, an dem die obige Voraussetzung nicht mehr erfüllt ist, d.h. die genäherte Greenfunktion (4.4) stellt physikalisch keine gute Näherung dar.

In einem weiteren über b) hinausgehenden Schritt erfolgt

c) die nicht-relativistische Behandlung der ΛN -Streuung.

- Zusätzlich zu den unter b) genannten Punkten werden auch in den Vertexfunktionen alle Energien bis zum zweiten Glied entwickelt. Außerdem werden in den OBE-Potentialen nur Terme bis zur Ordnung \vec{q}^2/M^2 berücksichtigt. Diese Behandlung des ΛN -Systems entspricht den Ortsraumrechnungen.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die Σ -Boxen ($I=1/2$) behandelt. Der Inhalt des zweiten Abschnitts ist die Partialwellendarstellung der Gl. (4.1) und deren Transformation von der Helizitätsbasis in die übliche $|LSJ\rangle$ -Basis. Im dritten Abschnitt soll auf die numerische Lösungsmethode der Streugleichung eingegangen werden, und der vierte und letzte Abschnitt gibt den Zusammenhang der on-shell R-Matrixelemente mit der Streuphase an.

4.1 Zusätzliche Box-Diagramme in der ΛN -Streuung

Die Iteration der Streugleichung (4.1) enthält Terme höherer Ordnung nur in der Form, daß in allen Zwischenzuständen nur die beiden Baryonen Lambda und Nukleon vorkommen. Diese Beschreibung ist jedoch nicht vollständig, da eine Kopplung des ΛN -Systems mit dem ΣN -System auftritt. Durch die Addition von zusätzlichen Box-Diagrammen läßt sich dieser Effekt teilweise berücksichtigen.

Es werden folgende Box-Diagramme mitgenommen:

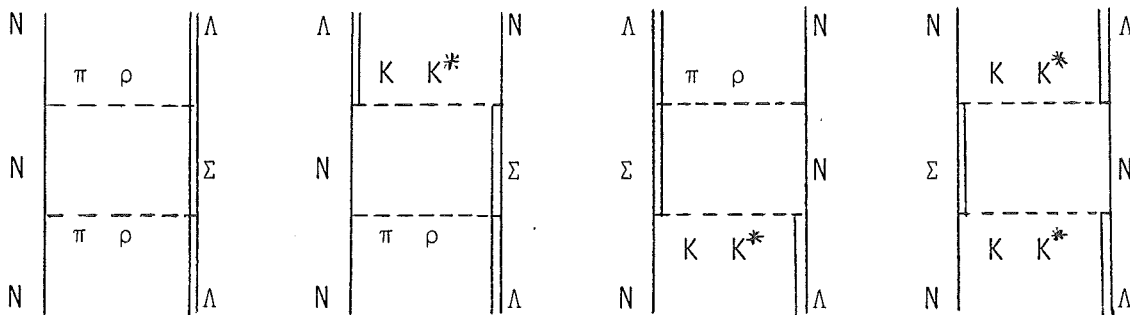
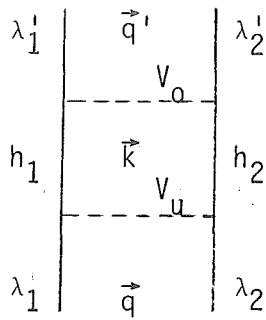


Fig. 20: Box-Diagramme

Da am $\Lambda\Sigma$ -Vertex der Isospin geändert werden muß, ist der Austausch von isoskalaren Mesonen in diesen Boxen nicht möglich. Die austauschbaren Mesonen sind hier π, K, ρ, K^* . Sie sind in den Graphen Fig. 20 eingetragen. Alle Boxen sind mit dem Isospinfaktor 3 zu multiplizieren. Dies folgt aus der SU_3 -Lagrangefunktion (NAG75).

Die analytischen Ausdrücke der Box-Diagramme ergeben sich aus der Multiplikation der beiden Ein-Boson-Austausch-Potentiale. Dabei wird über die Zwischenzustandsenergie E_k integriert und über alle Helizitätszustände summiert.



Die Helizitätsamplituden der Box lauten somit

$$\langle \lambda_1' \lambda_2' | V_{\text{Box}}^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \sum_{h_1 h_2} \int d\vec{k} \langle \lambda_1' \lambda_2' | V_0^J(q', k) | h_1 h_2 \rangle h(\vec{k}, z) \quad (4.5)$$

$$\langle h_1 h_2 | V_U^J(k, q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

Der Box-Propagator $h(\vec{k}, z)$ hat die Form:

$$h(\vec{k}, z) = \frac{1}{z - E_k} \quad (4.6)$$

wobei $z = E_q = E_1 + E_2$, $E_k = E_1 + E_2$.

Für die acht Helizitätsamplituden der Box erhält man aus Gl. (4.5):

$$\begin{aligned} 0_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [0_V^J 0_V^J + 2_V^J 3_V^J] \\ 1_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [1_V^J 1_V^J + 3_V^J 2_V^J] \\ 2_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [0_V^J 2_V^J + 2_V^J 1_V^J] \\ 3_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [3_V^J 0_V^J + 1_V^J 3_V^J] \\ 12_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [12_V^J 12_V^J + 57_V^J 68_V^J] \\ 34_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [68_V^J 57_V^J + 34_V^J 34_V^J] \\ 57_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [12_V^J 57_V^J + 57_V^J 34_V^J] \\ 68_{V_{\text{Box}}}^J &= \int dk k^2 h(k, z) [68_V^J 12_V^J + 34_V^J 68_V^J] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Amplituden iV^J ($i = 0,1,2,3,12,34,57,68$) sind die Helizitätsmatrixelemente der OBEs, vgl. (2.28), (2.29), (2.30).

Für die Σ -Box lautet der Propagator

$$h(k,z) = \frac{1}{E_N(q)+E_\Lambda(q)-E_N(k)-E_\Sigma(k)} \quad (4.8)$$

Für kleine Startimpulse q ist er negativ, da die Masse des Σ -Baryons größer ist als die des Λ -Baryons. Er besitzt einen Pol an der Stelle $E_\Lambda(q)+E_N(q) = E_N(k)+E_\Sigma(k)$. Für $k=0$ (erstes Auftreten des Pols) entspricht dieses einem Startimpuls $q \approx 297.4$ MeV. Nach der Umrechnungsformel (Anhang 4) ergibt sich daraus eine Laborenergie von $E_{\text{Lab}} \approx 190$ MeV.

Für die nicht-relativistischen Rechnungen werden die Energien in (4.8) bis zum zweiten Glied entwickelt. Man erhält dann:

$$h(k,z) \approx \frac{-2\mu_{N\Sigma}}{k^2 - \frac{\mu_{N\Sigma}}{\mu_{N\Lambda}} q^2 - 2\mu_{N\Sigma}(M_\Lambda - M_\Sigma)} \quad (4.9)$$

wobei

$$\mu_{N\Lambda} = \frac{M_\Lambda M_N}{M_\Lambda + M_N}, \quad \mu_{N\Sigma} = \frac{M_\Sigma M_N}{M_\Sigma + M_N}$$

die reduzierten Massen von ΛN bzw. ΣN sind.

Die Σ -Schwelle liegt nun bei einer Laborenergie von

$$E_{\text{Lab}} \approx 168 \text{ MeV}.$$

Um in den Rechnungen unterhalb der Σ -Schwelle zu bleiben, wird die Streugleichung bis zu der Laborenergie $E_{\text{Lab}} = 165 \text{ MeV}$ gelöst.

4.2 Die Partialwellendarstellung der Streugleichung

In der Helizitätsbasis wird aus Gl. (4.1)

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | R(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (4.10)$$

$$- p \int d^3k \sum_{h_1 h_2} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V(\vec{q}', \vec{k}) | h_1 h_2 \rangle \langle h_1 h_2 | R(\vec{k}, \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle g(\vec{k}, z)$$

Verwendet man für die R-Matrix eine analoge Partialwellenentwicklung wie für das Potential (2.15)

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | R(\vec{q}', \vec{q}) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | R^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle ,$$

dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\lambda'}^J(\vartheta_{\vec{q}', \vec{q}}) [\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | R^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle - \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle] \\ &= - \frac{1}{(4\pi)^2} p \sum_{J' J''} \int dk k^2 (2J'+1)(2J''+1) g(k, z) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^{J'}(q', k) | h_1 h_2 \rangle \\ & \times \langle h_1 h_2 | R^{J''}(k, q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \int d\hat{k} d_{h\lambda'}^{J'}(\vartheta_{\vec{q}', \vec{k}}) \cdot d_{\lambda h}^{J''}(\vartheta_{\vec{k}, \vec{q}}) \end{aligned}$$

Das Integral über die beiden d-Funktionen ist im Anhang 4 berechnet. Es wird

$$\int d\hat{k} d_{h\lambda'}^{J'}(\vartheta_{\vec{q}', \vec{k}}) \cdot d_{\lambda h}^{J''}(\vartheta_{\vec{k}, \vec{q}}) = \frac{4\pi}{2J'+1} d_{\lambda' \lambda}^{J'}(\vartheta_{\vec{q}, \vec{q}'}) \delta_{J' J''}$$

Mit $d_{\lambda'\lambda}^{J'}(\vec{q}, \vec{q}') = d_{\lambda\lambda'}^J(\vec{q}, \vec{q}')$ lautet schließlich die Partialwellendarstellung der Streugleichung

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | R^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (4.11)$$

$$- \sum_{h_1 h_2} p \int dk k^2 g(k, z) \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | V^J(q', k) | h_1 h_2 \rangle \times \langle h_1 h_2 | R^J(k, q) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

Diese Gleichung liefert für jede der acht Helizitätsamplituden eine vierfach gekoppelte Integralgleichung. Die Kopplung entsteht durch die Summation über die Zwischenhelizitäten.

Führt man für die R-Matrixamplituden*

$$\begin{aligned} R_1^J &= \langle ++ | R^J | ++ \rangle & R_5^J &= \langle ++ | R^J | +- \rangle \\ R_2^J &= \langle ++ | R^J | -- \rangle & R_6^J &= \langle +- | R^J | ++ \rangle \\ R_3^J &= \langle +- | R^J | +- \rangle & R_7^J &= \langle ++ | R^J | -+ \rangle \\ R_4^J &= \langle +- | R^J | -+ \rangle & R_8^J &= \langle -+ | R^J | ++ \rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

die analogen Linearkombinationen wie für die Potentialamplituden ein (2.21), dann läßt sich das Gleichungssystem auf ein zweifach gekoppeltes System zurückführen, d.h. mit

$$\begin{aligned} 0_R^J &= R_1^J - R_2^J & 12_R^J &= R_1^J + R_2^J \\ 1_R^J &= R_3^J - R_4^J & 34_R^J &= R_3^J + R_4^J \\ 2_R^J &= R_5^J - R_7^J & 57_R^J &= R_5^J + R_7^J \\ 3_R^J &= R_6^J - R_8^J & 68_R^J &= R_6^J + R_8^J \end{aligned} \quad (4.13)$$

* Bezeichnungen wie (1.6)

lautet das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 {}^0_R J &= {}^0_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^0_V J \cdot {}^0_R J + {}^2_V J \cdot {}^3_R J] \\
 {}^1_R J &= {}^1_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^1_V J \cdot {}^1_R J + {}^3_V J \cdot {}^2_R J] \\
 {}^2_R J &= {}^2_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^0_V J \cdot {}^2_R J + {}^2_V J \cdot {}^1_R J] \\
 {}^3_R J &= {}^3_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^1_V J \cdot {}^3_R J + {}^3_V J \cdot {}^0_R J] \\
 {}^{12}_R J &= {}^{12}_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^{12}_V J \cdot {}^{12}_R J + {}^{57}_V J \cdot {}^{68}_R J] \\
 {}^{34}_R J &= {}^{34}_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^{34}_V J \cdot {}^{34}_R J + {}^{68}_V J \cdot {}^{57}_R J] \\
 {}^{57}_R J &= {}^{57}_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^{12}_V J \cdot {}^{57}_R J + {}^{57}_V J \cdot {}^{34}_R J] \\
 {}^{68}_R J &= {}^{68}_V J - P \int dk k^2 g(k,z) [{}^{34}_V J \cdot {}^{68}_R J + {}^{68}_V J \cdot {}^{12}_R J]
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Die Transformation der R-Matrix in die $|JMLS\rangle$ Basis verläuft analog zu Kap.

2.2.4. Man erhält:

Spin singlet:

$$S=0, L'=L=J: {}^0_R J = R^J_1 - R^J_2$$

Spin triplet:

$$S=1, L'=L=J: {}^1R^5 = R_3^J - R_4^J$$

$$L'=L=J+1: {}^+R^J = \frac{1}{2J+1} [(J+1) {}^{12}R_{+J}^J \cdot {}^{34}R^J - \sqrt{J(J+1)} ({}^{57}R^J + {}^{68}R^J)]$$

$$L'=L=J-1: {}^-R^J = \frac{1}{2J+1} [J \cdot {}^{12}R^J + (J+1) {}^{34}R^J + \sqrt{J(J+1)} ({}^{57}R^J + {}^{68}R^J)] \quad (4.15)$$

$$L'=J+1, L=J-1: {}^{+-}R^J = -\frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [{}^{12}R^J - {}^{34}R^J + \frac{J+1}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{57}R^J - \frac{J}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{68}R^J]$$

$$L'=J-1, L=J+1: {}^{-+}R^J = -\frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1} [{}^{12}R^J - {}^{34}R^J - \frac{J}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{57}R^J + \frac{J+1}{\sqrt{J(J+1)}} {}^{68}R^J]$$

Triplet-singlet-transition:

$$L'=L=J; S'=0, S=1: ST_R^J = -2R^J$$

$$S'=1, S=0: TS_R^J = -3R^J$$

4.3 Numerische Lösungsmethode der Streugleichung

Zur Lösung der Integralgleichungen (4.14) wird die Methode der Matrixinversion verwendet (HT70), die in diesem Abschnitt beschrieben werden soll. Es handelt sich um ein System von acht gekoppelten Gleichungen, das jedoch durch eine gut zu begründende Näherung wesentlich vereinfacht werden kann. In den höheren Partialwellen p,d,f usw. tritt aufgrund des Operators Ω_{ST} (2.61) eine Kopplung zwischen Singlett- und Triplett-Zuständen auf. Die diesen Übergängen entsprechenden Helizitätsmatrixelemente sind ${}^2V^J$ und ${}^3V^J$. Aus den Formeln (2.51), (2.53) erkennt man, daß zu diesen Amplituden nur das skalare und die Vektorme-

sonen beitragen können. Aber diese Beiträge sind sehr klein (vgl. Kap. 2.3.1, Fig. 17)., da der Operator Ω_{ST} stets in Verbindung mit Vorfaktoren auftritt, die die Massendifferenzen zwischen Λ und N enthalten. Diese Faktoren würden im Falle exakter SU_3 -Symmetrie verschwinden. Der einzige Term, der in einer exakten SU_3 -Symmetrie überleben würde, wäre der Beitrag

$$\frac{G_{V_2}^f v_1}{\mu} \left(\frac{M_\Lambda}{2} + M_N \left(1 + \frac{M_N}{2M_\Lambda} \right) \right) - \frac{G_{V_1}^f v_2}{\mu} \left(\frac{M_N}{2} + M_\Lambda \left(1 + \frac{M_\Lambda}{2M_N} \right) \right)$$

vom Vektormeson. Auch hier würde also eine große Cancellation erfolgen. Man kann daher, ohne einen großen Fehler zu machen, in der Berechnung der Streuphasen den antisymmetrischen Spin-Bahn-Operator vernachlässigen. In den S-Phasen spielt er ohnehin keine Rolle (NAG75). Infolge dieser Näherung vereinfacht sich das Gleichungssystem (4.14) zu:

$$\begin{aligned} 0_R^J &= 0_V^J - P \int dk k^2 g(k,z) 0_V^J 0_R^J \\ 1_R^J &= 1_V^J - P \int dk k^2 g(k,z) 1_V^J 1_R^J \\ 12_R^J &= 12_V^J - P \int dk k^2 g(k,z) [12_V^J 12_R^J + 57_V^J 68_R^J] \\ 34_R^J &= 34_V^J - P \int dk k^2 g(k,z) [34_V^J 34_R^J + 68_V^J 57_R^J] \\ 57_R^J &= 57_V^J - P \int dk k^2 g(k,z) [12_V^J 57_R^J + 57_V^J 34_R^J] \\ 68_R^J &= 68_V^J - P \int dk k^2 g(k,z) [34_V^J 68_R^J + 68_V^J 12_R^J] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Man verbleibt also mit sechs Gleichungen, von denen zwei entkoppelt sind. Diese Gleichungen haben die Struktur

$$R^J = V^J - P \int_0^\infty dk k^2 \frac{1}{E_k - E} V^J R^J. \quad (4.17)$$

Sie besitzen eine isolierte Singularität bei $E_k = E$, die sich nach dem Cauchy'schen Integralsatz in folgender Weise beheben läßt.

Zunächst führt die Variablentransformation

$$dk = dE_k \frac{E_{1''}(k)E_{2''}(k)}{k \cdot E_k} *$$

auf

$$R^J = V^J - P \int_{M_{1''}+M_{2''}}^\infty dE_k \frac{k E_{1''}(k)E_{2''}(k) \cdot V^J R^J}{E_k (E_k - E)} \quad (4.18)$$

Mit

$$\int_{M_{1''}+M_{2''}}^\infty dE_k \frac{1}{E_k (E_k - E)} = -\frac{1}{E} \ln \left(\frac{E}{M_{1''}+M_{2''}} - 1 \right) \quad (E \geq M_{1''}+M_{2''})$$

und

$$\begin{aligned} & qE_1(q)E_2(q) V^J R^J P \int_{M_{1''}+M_{2''}}^\infty dE_k \frac{1}{E_k (E_k - E)} \\ &= -\frac{qE_1(q)E_2(q)V^J R^J}{E} \ln \left(\frac{E}{M_{1''}+M_{2''}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

* Bezeichnungen s. S. 71

wird aus (4.18)

$$R^J = V^J - \int_{M_1''+M_2''}^{\infty} dE_k \{k \cdot E_1''(k) E_2''(k) V^J R^J - q E_1(q) E_2(q) V^J R^J\} \frac{1}{E_k(E_k - E)} + \frac{q E_1(q) E_2(q) V^J R^J}{E} \ln \left(\frac{E}{M_1''+M_2''} - 1 \right) \quad (4.20)$$

Es wurde das Integral (4.19) addiert und subtrahiert. Die Rücktransformation auf die Integrationsvariable k liefert

$$R^J(q', q) = V^J(q', q) - \int_0^{\infty} dk \{k^2 V^J(q', k) R^J(k, q) - \frac{k q E_1(q) E_2(q)}{E_1''(k) E_2''(k)} V^J(q', q) R^J(q, q)\} \times \frac{1}{E_k - E} + \frac{q E_1(q) E_2(q) V^J(q', q) R^J(q, q)}{E} \ln \left(\frac{E}{M_1''+M_2''} - 1 \right) \quad (4.21)$$

Bei der numerischen Integration wird das Integral durch eine Summe über eine endliche Anzahl von Gaußpunkten ersetzt,

$$k_i \in \{k_1, \dots, k_n\},$$

dabei ist der Fall $k_i = q$ ausgeschlossen, so daß der Integrand in (4.21) keinen Pol mehr besitzt. Mit dem zusätzlichen Punkt $k_{n+1} := q$ läßt sich (4.21) dann schreiben als:

$$\begin{aligned}
 R^J(k_i, k_{n+1}) = & V^J(k_i, k_{n+1}) - \sum_{j=1}^n \frac{\delta k_j}{E(k_j) - E(k_{n+1})} \{ k_j^2 V^J(k_i, k_j) R^J(k_j, k_{n+1}) \\
 & - \frac{k_j k_{n+1} E_1(k_{n+1}) E_2(k_{n+1})}{E_{1''}(k_j) E_{2''}(k_j)} V^J(k_i, k_{n+1}) R^J(k_{n+1}, k_{n+1}) \} \\
 & + \frac{k_{n+1} E_1(k_{n+1}) E_2(k_{n+1})}{E(k_{n+1})} V^J(k_i, k_{n+1}) R^J(k_{n+1}, k_{n+1}) \\
 & \times \ln \left(\frac{E(k_{n+1})}{M_{1''} + M_{2''}} - 1 \right)
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Gl. (4.22) läßt sich umschreiben in

$$V^J(k_i, k_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \{ \delta_{ij} + F(k_j, k_{n+1}) V^J(k_i, k_j) \} R^J(k_j, k_{n+1}) \quad (4.23)$$

wobei

$$F(k_j, k_{n+1}) = \begin{cases} \frac{k_j^2 \delta k_j}{E(k_j) - E(k_{n+1})} & \text{für } j \leq n \\ - \frac{k_{n+1} E_1(k_{n+1}) E_2(k_{n+1})}{E(k_{n+1})} \ln \left(\frac{E(k_{n+1})}{M_{1''} + M_{2''}} - 1 \right) & \text{für } j = n+1 \\ - \sum_{\ell=1}^n \frac{k_\ell k_{n+1} E_1(k_{n+1}) E_2(k_{n+1}) \delta k_\ell}{E_{1''}(k_\ell) E_{2''}(k_\ell) (E(k_\ell) - E(k_{n+1}))} & \end{cases} \quad (4.24)$$

Durch eine einfache Matrixinversion erhält man damit

$$R^J(k_j, k_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \{ \delta_{ij} + F(k_j, k_{n+1}) V^J(k_i, k_j) \}^{-1} V^J(k_j, k_{n+1}) \quad (4.25)$$

Das Lösungsverfahren der gekoppelten Gleichungen in (4.16) ist analog.

Zunächst lassen sich die vier Gleichungen kompakter schreiben:

$$\begin{pmatrix} 12_R^J \\ 68_R^J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12_V^J \\ 68_V^J \end{pmatrix} - P \int dk k^2 g(k,z) \begin{pmatrix} 12_V^J & 57_V^J \\ 68_V^J & 34_V^J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12_R^J \\ 68_R^J \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

$$\begin{pmatrix} 57_R^J \\ 34_R^J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57_V^J \\ 34_V^J \end{pmatrix} - P \int dk k^2 g(k,z) \begin{pmatrix} 12_V^J & 57_V^J \\ 68_V^J & 34_V^J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 57_R^J \\ 34_R^J \end{pmatrix}$$

Sie nehmen dadurch die gleiche Form an wie (4.17). Nur handelt es sich jetzt nicht mehr einfach um $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen, sondern um $(2n+2) \times (2n+2)$ -Matrizen.

Der Grund für das Auftreten dieser Kopplungen sind die Tensorkräfte, die Zustände mit $L=J-1$ und $L=J+1$ miteinander vermischen. Die Potentialmatrix ist also gekennzeichnet durch

$$\begin{matrix} & J-1 & J+1 \\ J-1 & \begin{pmatrix} . & . \\ . & . \end{pmatrix} \\ J+1 & \end{matrix}$$

Wählt man nun für $J-1$ die Gaußpunkte k_1, \dots, k_{n+1} und für $J+1$ die weiteren k_{n+2}, \dots, k_{2n+2} , wobei $k_1 = k_{n+2}, k_2 = k_{n+3}, \dots, k_{n+1} = k_{2n+2}$, dann läßt sich das Matrixinversionsverfahren (4.25) völlig analog anwenden.

4.4 Berechnung der Streuphasen

Der Zusammenhang zwischen den on-shell-R-Matrixelementen $R_\ell(q)$ und den Streuphasen $\delta_\ell(q)$ ist gegeben durch (JOA75):

$$R_\ell(q) = - \frac{1}{\pi p(E^+)} \tan \delta_\ell(q) , \quad (4.27)$$

wobei $\rho(E')$ die Dichte der Zustände im Endzustand ist. Bestimmung von $\rho(E')$:

Betrachtet wird die Reaktion: $1+2 \rightarrow 1'+2'$. Sei $\vec{q}' = \vec{q}'_1 = -\vec{q}'_2$, der Ausgangsimpuls und $E' = E_{1'} + E_{2'}$ die Energie im Endzustand im CMS. Die Dichte der Zustände ist dann allgemein:

$$\rho(E') = q'^2 \cdot \frac{dq'}{dE'} . \quad (4.28)$$

Mit

$$E' = \sqrt{M_1^2 + q'^2} + \sqrt{M_2^2 + q'^2}$$

wird

$$\frac{dE'}{dq'} = q' \left(\frac{1}{E_{1'}} + \frac{1}{E_{2'}} \right)$$

oder

$$\frac{dq'}{dE'} = \frac{1}{q'} \cdot \frac{E_{1'} E_{2'}}{E_{1'} + E_{2'}} \quad (4.29)$$

Da nur elastische Streuung betrachtet wird, ist der Betrag des auslaufenden Impulses q' gleich dem Betrag des einlaufenden q . Mit Gl. (4.29) wird somit:

$$R_\ell(q) = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{q} \frac{E_{1'} \cdot E_{2'}}{E_{1'} + E_{2'}} \tan \delta_\ell(q) \quad (4.30)$$

oder

$$\tan \delta_\ell(q) = -\pi q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot R_\ell(q) \quad (4.31)$$

Für die Spin-singlet-Streuung folgt aus (4.31) sofort:

$$\tan {}^0\delta^J(q) = -\pi q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot {}^0R^J(q) \quad (4.32)$$

und für die Spin-triplet-Streuung bei festem Bahndrehimpuls L:

$$\tan {}^1\delta^J(q) = -\pi q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot {}^1R^J(q) \quad (4.33)$$

Für die gekoppelten Zustände (Kopplungen zwischen den Bahndrehimpulsen $L'=J+1$, $L=J-1$ im Spin-triplet-Zustand aufgrund vorhandener Tensorkräfte) läßt sich die R-Matrix schreiben als:

$$\begin{pmatrix} -{}_R^J & -{}_R^J \\ +{}_R^J & +{}_R^J \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Blatt-Biedenharn-Eigenphasen ${}^+\delta^J, {}^-\delta^J$ und dem Mischungsparameter ϵ_J , der ein Maß für die Stärke der Kopplung darstellt, läßt sich diese Matrix diagonalisieren (vgl. ERK74):

$$\begin{pmatrix} -{}_R^J & -{}_R^J \\ +{}_R^J & +{}_R^J \end{pmatrix} = u^{-1} \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} u \quad (4.34)$$

Die unitäre Matrix u ist gegeben durch:

$$u = \begin{pmatrix} \cos \epsilon_J & -\sin \epsilon_J \\ \sin \epsilon_J & \cos \epsilon_J \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

* Der Vorfaktor $E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ wird in den nicht-relativistischen Rechnungen ersetzt durch $M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$.

Die R_1, R_2 sind die Eigenwerte der R-Matrix, die durch die Eigenphasen $^{-\delta^J, +\delta^J}$ parametrisiert werden.

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{q} \frac{E_{1'} + E_{2'}}{E_{1'} E_{2'}} \tan^{-\delta^J} \\ R_2 &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{q} \frac{E_{1'} + E_{2'}}{E_{1'} E_{2'}} \tan^{+\delta^J} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Die Vorfaktoren sind so gewählt, daß die Struktur der Gl. (4.30) erhalten bleibt.

Die Lösung des Eigenwertproblems (4.34) liefert sowohl die Eigenwerte R_1, R_2 als auch den Parameter ϵ_J in Abhängigkeit von den R-Matrixamplituden. Mit Hilfe von (4.34) können auf diese Weise die Blatt-Biedenharn-Eigenphasen direkt durch die Helizitätsamplituden der R-Matrix ausgedrückt werden. Man erhält die Resultate:

$$\begin{aligned} \tan^{-\delta^J} &= -\frac{\pi}{2} q \frac{E_{1'} E_{2'}}{E_{1'} + E_{2'}} \left[12_R^J + 34_R^J - \frac{12_R^J - 34_R^J - 4\sqrt{J(J+1)} 57_R^J}{(2J+1)\cos 2\epsilon_J} \right] \\ \tan^{+\delta^J} &= -\frac{\pi}{2} q \frac{E_{1'} E_{2'}}{E_{1'} + E_{2'}} \left[12_R^J + 34_R^J + \frac{12_R^J - 34_R^J - 4\sqrt{J(J+1)} 57_R^J}{(2J+1)\cos 2\epsilon_J} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\tan 2\epsilon_J = -2 \frac{\sqrt{J(J+1)} (12_R^J - 34_R^J) + 57_R^J}{12_R^J - 34_R^J - 4J(J+1) 57_R^J} \quad (4.38)$$

5. Resultate und Diskussionen

Bis hierhin ist der mathematische Formalismus zur Berechnung des ΛN -Systems abgeschlossen. In diesem Kapitel sollen nun die Ergebnisse der verschiedenen Untersuchungen dargestellt und diskutiert werden. Die in den Rechnungen verwendeten Parameter entnehme man Tabelle 1 (zu den Kopplungskonstanten s. Kap. 3).

Tabelle 1

	Nukleon		Lambda		Sigma			
Baryon-Massen (MeV)	938,926		1116		1193			

	σ	η	π	ω	ϕ	ρ	K	K^*
Meson-Massen (MeV)	500	548,8	138	782,6	1019	773	495,82	895
Cut-Off (MeV)	1000	1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500

5.1 Wirkung der verschiedenen Mesonen auf die Streuphasen

Eine Analyse der Streuphasen liefert folgende allgemeine Eigenschaften des ΛN -Systems:

- 1) Die Spin-Singulett-Wechselwirkung (z.B. $^1S_0, ^1P_1$) ist stärker als die Spin-Triplett-Wechselwirkung (z.B. $^3S_1, ^3P_1$).

- 2) Das effektive skalare σ -Meson ist attraktiv in jeder Partialwelle. Der Beitrag nimmt mit steigendem Bahndrehimpuls ab, ist jedoch fast unabhängig vom Gesamtdrehimpuls und Spin.
- 3) Die Wirkung des pseudoskalaren π -Mesons auf die Streuphasen ist sehr klein. In der 1S_0 -Phase wirkt es ein wenig attraktiv, in der 3S_1 -Phase ein wenig repulsiv. In den höheren Phasen (P,D,F) ist es vernachlässigbar. Die entgegengesetzte Wirkung des π auf Spin-Singulett- bzw. Spin-Triplett-Zustände erklärt sich durch den Operator Ω_σ (Gl. (2.50)), der für $S=0$ Zustände den Eigenwert -3 und für $S=1$ Zustände den Wert $+1$ besitzt.
- 4) Das ω -Meson wirkt repulsiv in jeder Partialwelle, besonders in den S-Phasen. Es ist jedoch nicht stark genug, um die Attraktion des σ -Mesons zu kompensieren, so daß die Addition weiterhin attraktiv bleibt (vgl. Fig. 13a).
- 5) Der Einfluß des ϕ -Mesons auf die Streuphasen ist vernachlässigbar, es liefert nur sehr schwache Beiträge, die repulsiv wirken.
- 6) Das strange-Meson Kaon bringt Attraktion in den Phasen zu geradem J und Repulsion in den Zuständen zu ungeradem J . Der Grund für dieses wechselnde Verhalten liegt in dem Austauschcharakter des entsprechenden Graphen (S. 6a), denn die Helizitätsamplituden dieses Potentials werden mit dem Phasenfaktor $(-)^J$ multipliziert (Kap. 2.2.3). Die einzige Ausnahme in diesem Verhalten stellt die 3S_1 -Phase dar, auch dort wirkt das Kaon attraktiv. Die Erklärung dafür ist in der Iteration der Streugleichung zu finden. Für die S-Phasen ist der Born-Term allein keine gute Näherung, die Terme höherer Ordnung sind hier wichtig. Im Term zweiter Ordnung aber kompensieren sich die Phasenfaktoren der beiden Potentiale, so daß es auch hier zu einer Attraktion kommt.

- 7) Das Vektormeson K^* wirkt attraktiv in den 1S_0 -Zuständen und in den D-Zuständen. Auf die P-Zustände wirkt es repulsiv. Die 3S_1 -Phase wird für kleine Laborenergien ($E_{\text{Lab}} \leq 100$ MeV) zunächst etwas angehoben im Vergleich zu den Werten des Kaons, für größere Laborenergien jedoch reduziert. Zur möglichen physikalischen Erklärung dieses Verhaltens siehe den nächsten Punkt.
- 8) Bei der Addition von Kaon und K^* zeigt sich in den Phasen folgendes Wechselspiel:

Der 3S_1 -Zustand ist über die Tensorkraft an den 3D_1 -Zustand gekoppelt. Die Hauptbeiträge in diesen Partialwellen kommen durch die Tensoranteile der OBEP's. Der Beitrag des Kaons allein zum 3S_1 -Zustand ist attraktiv, zum 3D_1 -Zustand repulsiv (vgl. Fig. 9a, dort ist der Tensor des Kaons repulsiv, was der Repulsion im 3D_1 -Zustand entspricht, denn für $L=2$ ist die Bornsche Näherung gerechtfertigt). Das K^* liefert für den 3S_1 -Zustand zunächst Attraktion, für höhere E_{Lab} jedoch Repulsion. Dieses Verhalten wird vermutlich mit der Tensorkopplung zusammenhängen. Die Verbindung über die Bornsche Näherung zwischen den Streuphasen und dem Potential für höhere Bahndrehimpulse zeigt sich wiederum in der 3D_1 -Phase des K^* . Es wirkt dort attraktiv, was dem Verlauf des Tensorpotentials in Fig. 9a entspricht. Die ebenfalls im Zusammenhang mit Fig. 9a bereits diskutierte Tensorcancellation zwischen K und K^* macht sich nun auch in den Streuphasen bemerkbar. Durch die Addition des K^* auf das Kaon wird die Repulsion im 3D_1 -Zustand fast kompensiert. Daß sich diese Kompensation in den 3S_1 -Phasen nicht zeigt (möglicherweise deutet sie sich durch die bei höheren E_{Lab} 's auftretende Repulsion des K^* hier an) wird an der hier ungültigen Bornschen Näherung liegen. Viel ausgeprägter erscheint diese Eigenschaft in den gekop-

pelten Zuständen 3P_2 und 3F_2 . Das Kaon wirkt in beiden Zuständen attraktiv, das K^* dagegen repulsiv. In der Summe von Kaon und K^* heben sich in den beiden Zuständen 3P_2 und besonders in 3F_2 die Attraktion und die Repulsion fast auf.

5.2 Vergleich verschiedener Behandlungsweisen des ΛN -Systems

In diesem Kapitel werden die folgenden drei verschiedenen Behandlungen des ΛN -Systems miteinander verglichen:

MR-Rechnung - relativistische Rechnung mit Berücksichtigung der Meson-Retardierung.

OR-Rechnung - relativistische Rechnung ohne Berücksichtigung der Meson-Retardierung.

NR-Rechnung - nicht-relativistische Rechnung ohne Berücksichtigung der Meson-Retardierung.

Um die Einflüsse der nicht-relativistischen Behandlung des ΛN -Systems und der Vernachlässigung der Retardierung auf die Potentiale und Streuphasen zu untersuchen, wurden jeweils für den Austauschgraphen und den direkten Graphen die Partialwellen 1S_0 , 1D_2 des Potentials berechnet und die sich daraus ergebenden Streuphasen. Diese Singulett-Zustände wurden ausgewählt, da

- a) die Streuphasen 1S_0 bzw. 1D_2 nur durch diese Partialwellen bestimmt werden (s. Gl. (4.32)) und sich daher die Einflüsse auf die Potentiale und auf die Streuphasen leicht miteinander vergleichen lassen, und

- b) durch einen Vergleich der Ergebnisse für die S-Zustände, mit denen für die D-Zustände sich der Beitrag von den höheren Iterationstermen zeigt.

In den Figuren 21a bis 24a sind die Partialwellen der Potentiale in MeV^{-2} gegen den Relativimpuls der auslaufenden Teilchen in MeV aufgetragen*. Die Figuren 21b bis 24b zeigen die entsprechenden Streuphasen in Degrees, aufgetragen gegen die Laborenergie des Λ -Teilchens in MeV. Die maximale Laborenergie von 165 MeV entspricht einem Relativimpuls von etwa 280 MeV.

Fig. 21a zeigt, daß sich bis zu diesem Impuls die Ergebnisse der verschiedenen Berechnungen in der 1S_0 -Partialwelle nur unwesentlich unterscheiden, während sich die Näherungen in der 1S_0 -Streuphase recht drastisch bemerkbar machen. Beide Näherungen, die Vernachlässigung der Retardierung und ganz besonders die nicht-relativistische Behandlung bringen zusätzliche Attraktion. Die NR-Näherung liefert für die 1S_0 -Streuung Streuphasen, die etwa um einen Faktor 9 größer sind als im MR-Fall. Der Einfluß der OR-Näherung dagegen ist wesentlich kleiner; die 1S_0 -Streuphase wird etwa um einen Faktor 2 angehoben.

Der Grund für diese großen Änderungen in der Streuphase verglichen mit den relativ kleinen Unterschieden im Potential bei niedrigen Energien liegt hier in den Termen höherer Ordnung bei der Iteration der Streugleichung. Im Term zweiter Ordnung wird über die Zwischenzustandsenergie integriert, d.h. die Streuphase wird auch entscheidend mitbestimmt durch die Potentialwerte bei höheren Energien, und dort sind die Näherungen nicht mehr zu vernachlässigen (s. Fig. 21a). Aufgrund des stark positiven Potentials im NR-Fall wird der Term zweiter Ordnung hier stark negativ. Dies erklärt die Attraktion, die sich im Ergebnis für die Streuphase zeigt.

* Der Relativimpuls der einlaufenden Teilchen beträgt in allen Rechnungen 250 MeV.

Analoge Überlegungen erklären die Resultate für die 1S_0 -Partialwelle und die 1S_0 -Streuphase des direkten Graphen (Fig. 23a,b). Ein Vergleich der Fig. 21 und 23 zeigt weiterhin, daß die Terme höherer Ordnung zur $\Delta S=1$ Wechselwirkung stärker beitragen als zur $\Delta S=0$ Wechselwirkung.

Dieselben Rechnungen wurden ebenfalls für höhere Bahndrehimpulse durchgeführt. In den Fig. 22, 24 sind die Resultate für die D-Partialwellen dargestellt. Man erwartet hier, daß die höheren Iterationen keine große Rolle mehr spielen und daß die Streuphasen hauptsächlich durch den Born-Term bestimmt werden. Diese Überlegung wird in den Fig. 22 und 24 bestätigt. Das verglichen mit der MR-Rechnung etwas attraktivere Potential im NR-Fall liefert etwas positivere Streuphasen, die OR-Ergebnisse liegen zwischen beiden. Die großen Differenzen in den Partialwellen, die hier erst bei höheren Relativimpulsen auftreten, machen sich in den Streuphasen nicht so stark bemerkbar wie vergleichsweise in der S-Streuung. Die OR-Berechnung der 1D_2 -Streuphase für den direkten Graphen (Fig. 24b) liefert fast identisch die gleichen Resultate wie die MR-Rechnung. Der Grund dafür ist wiederum die hier gültige Bornsche Näherung. Die Streuphasen werden aus den on-shell-Elementen der R-Matrix berechnet. Kann nun die R-Matrix durch das Potential approximiert werden, dann ergeben sich die Streuphasen aus den on-shell-Werten des Potentials. Das on-shell-Verhalten des Potentials aber ist unabhängig von der Retardierung, (vgl. Gl. (4.2)), so daß sich diese Effekte in den Streuphasen zu höheren Bahndrehimpulsen immer weniger bemerkbar machen.

In den Figuren 25-27 sind die Streuphasen bis zum Bahndrehimpuls $L=2$ dargestellt. Um die Diagramme übersichtlich zu halten, wurde auf die nicht-relativistische Rechnung verzichtet. Stattdessen wird der Beitrag der beiden strange Mesonen Kaon und K^* zur AN-Streuung explizit aufgezeigt.

Die Kurvenbezeichnungen haben folgende Bedeutung:

MR I - MR-Rechnung mit den Mesonen Kaon und K^*

MR II - MR-Rechnung ohne die Mesonen Kaon und K^*

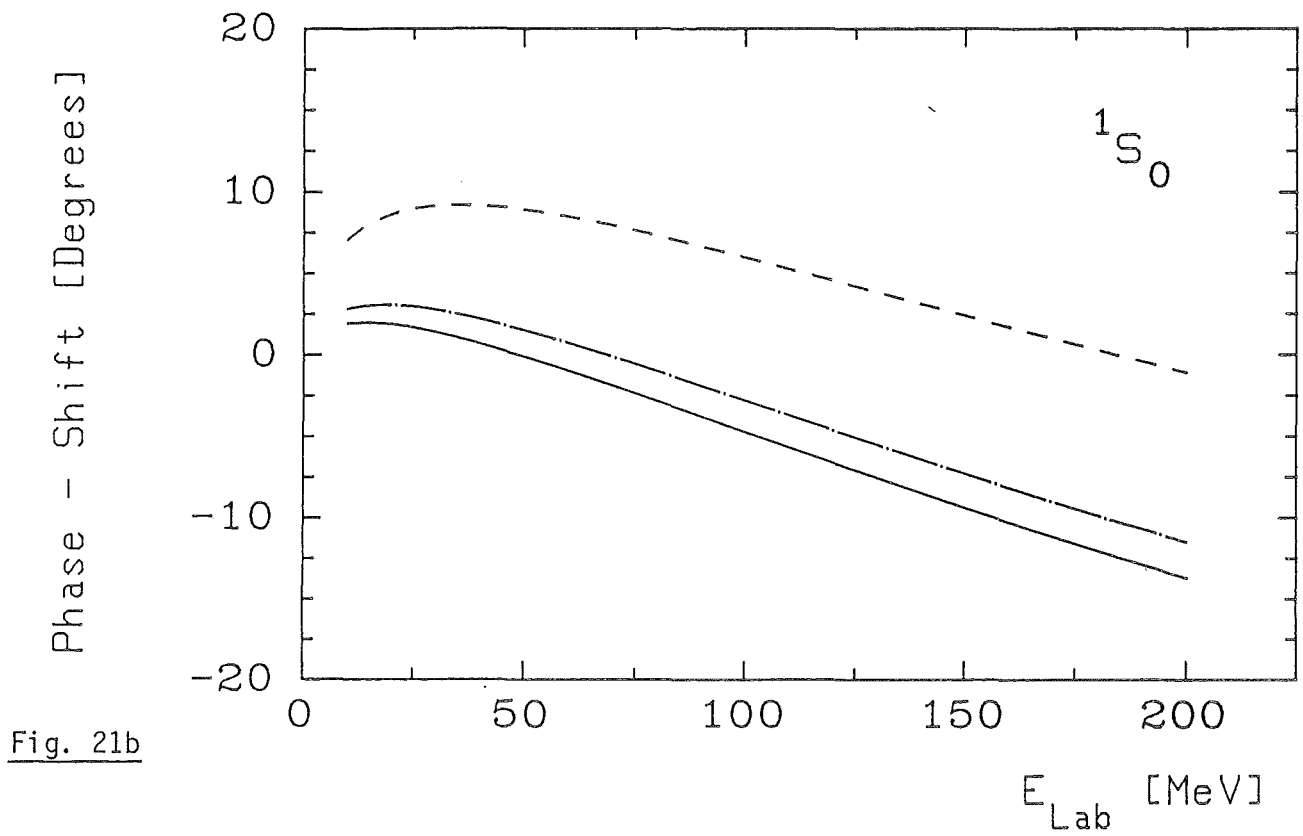
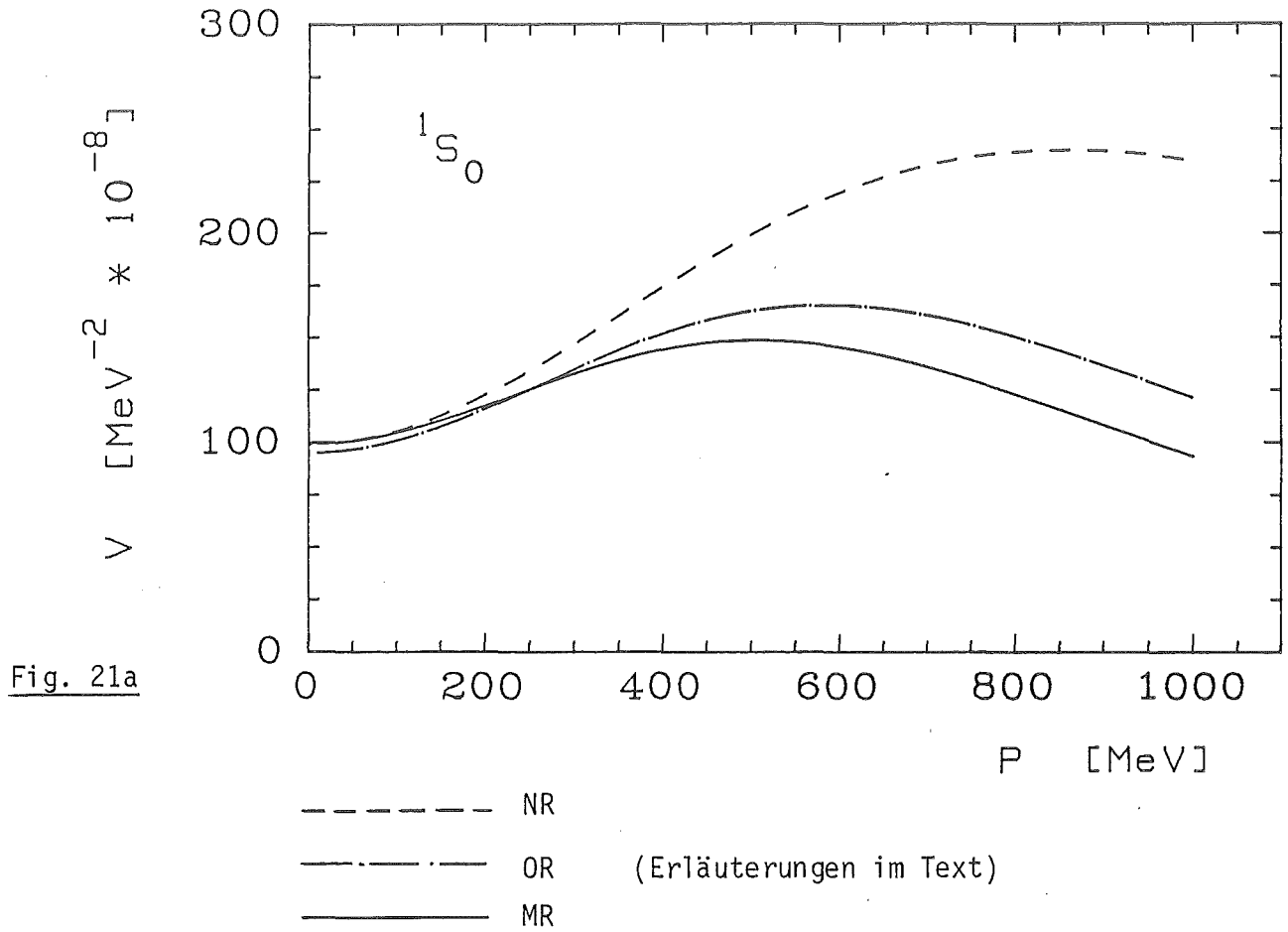
OR I - OR-Rechnung mit den Mesonen Kaon und K^*

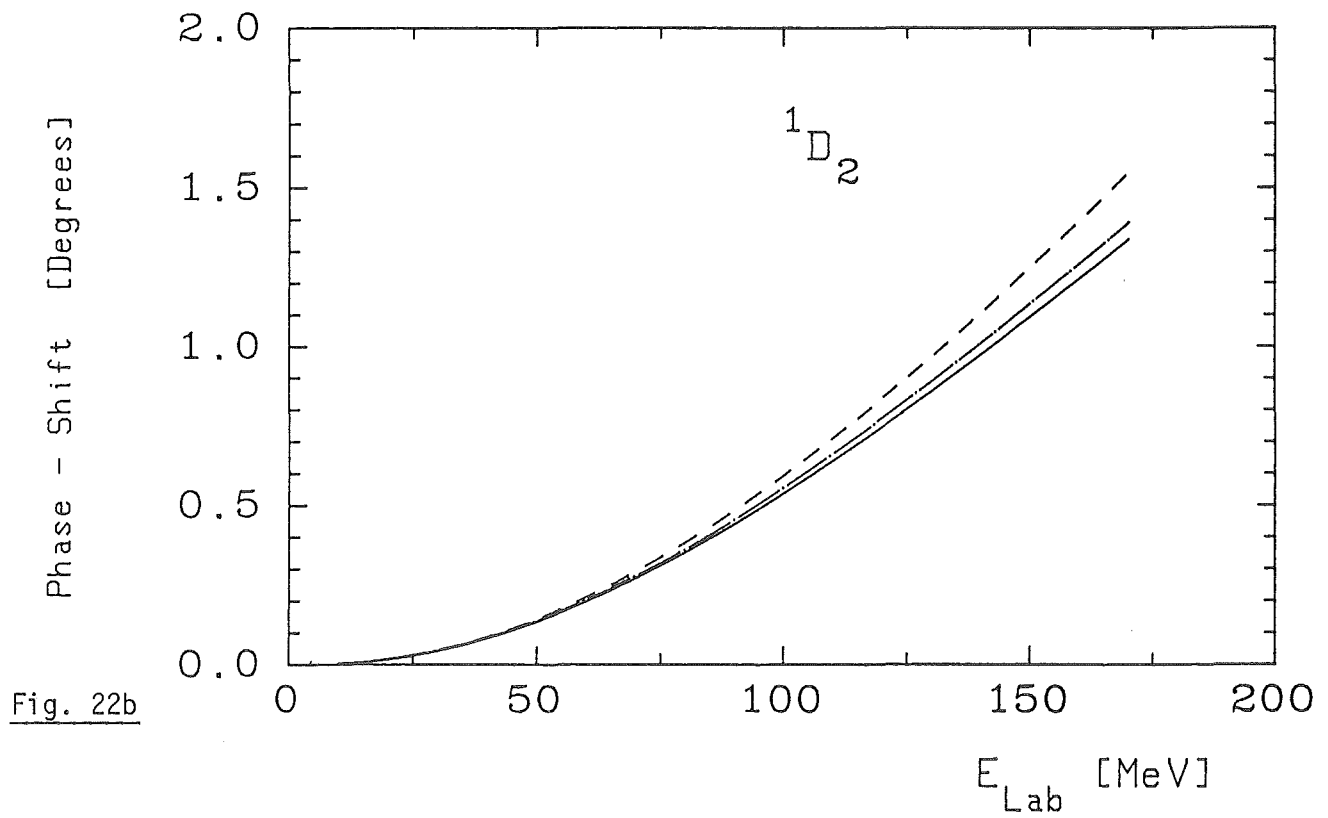
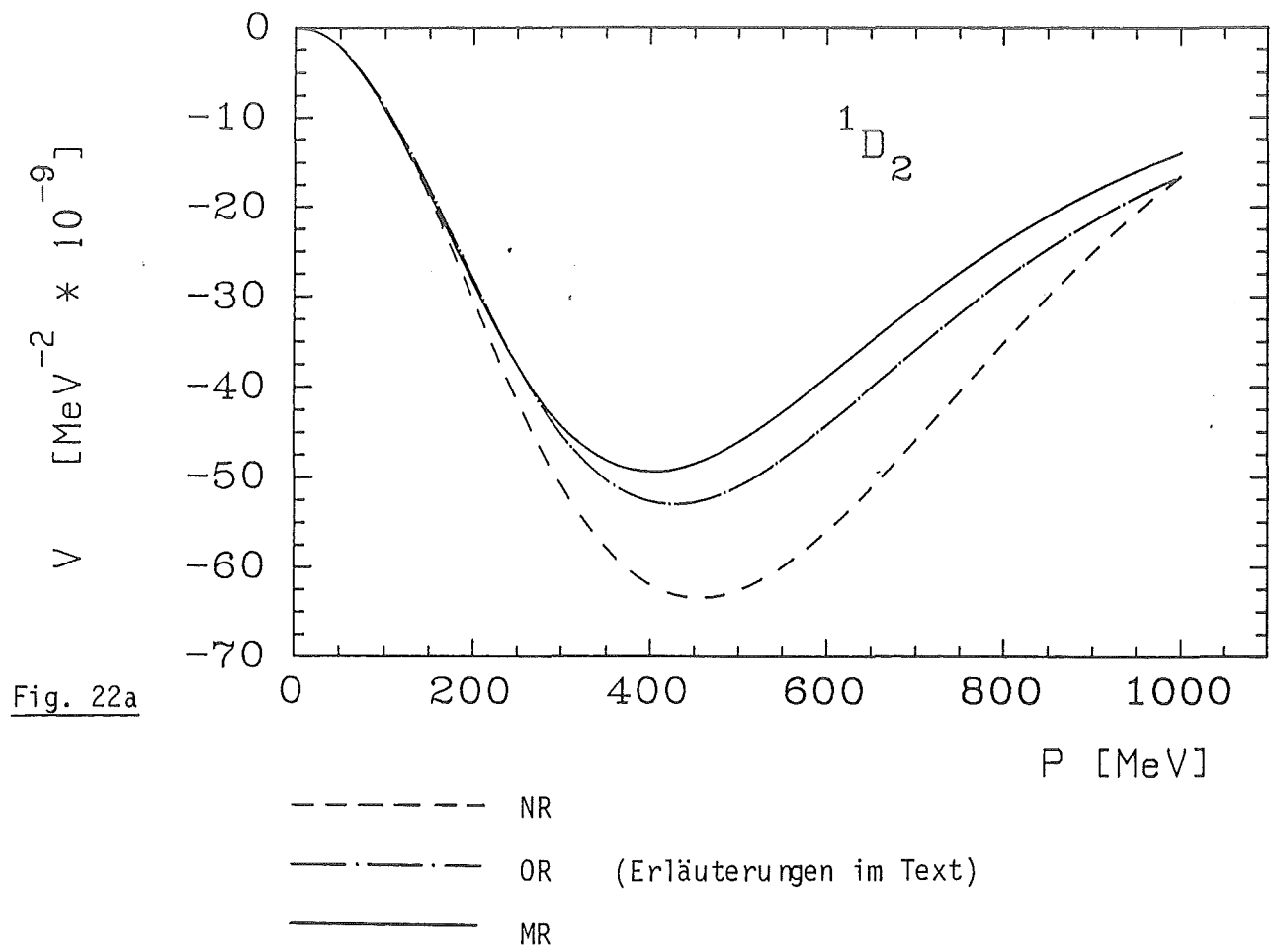
OR II - OR-Rechnung ohne die Mesonen Kaon und K^*

Aus den Figuren erkennt man, daß die Summe der beiden Mesonen Kaon und K^* in den Zuständen 1S_0 , 3S_1 , 3P_0 , 1D_2 und 3D_2 attraktiv wirken, während sie in 1P_1 , 3P_1 , 3P_2 und 3D_1 repulsiv beitragen.

Der relativ starke attraktive Beitrag der beiden Mesonen zu den S-Phasen wird hauptsächlich gegeben durch das Zentralpotential des K^* (s. Fig. 8a) und durch die Summe der Spin-Spin-Potentiale von Kaon und K^* (s. Fig. 10a). Beide Potentialformen liefern im Term zweiter Ordnung attraktive Beiträge.

Die Effekte der Retardierungsterme machen sich am stärksten in den S-Phasen bemerkbar und nehmen in den Streuphasen zu höheren Bahndrehimpulsen ab. Die Erklärung dafür wurde bereits oben gegeben. Eine Ausnahme von dieser Regel stellt die 3D_1 -Streuung dar. Hier ist der Einfluß der Retardierung vergleichsweise stark, jedoch liegt dies an der Kopplung der 3D_1 -Partialwelle und der 3S_1 -Welle.





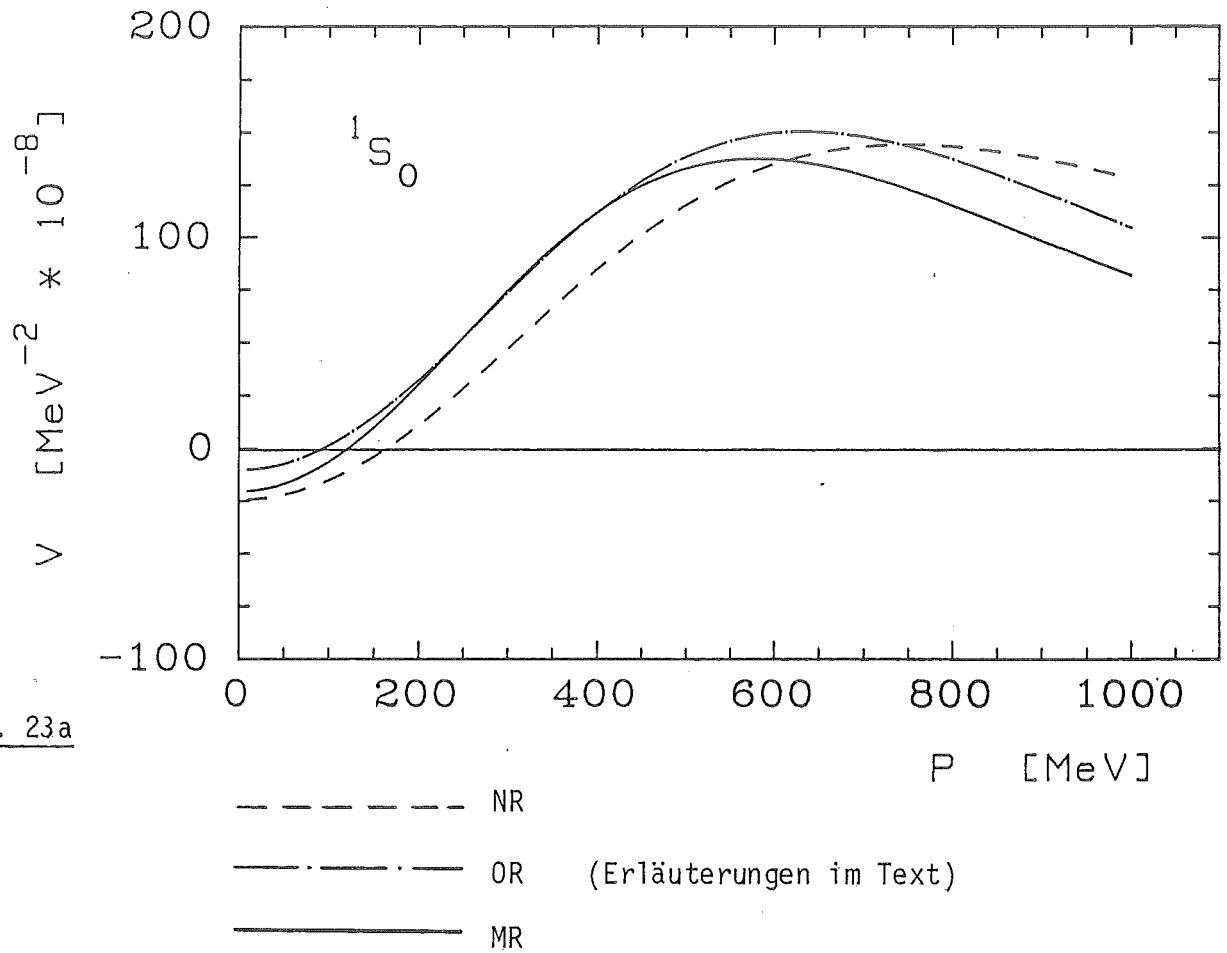


Fig. 23a

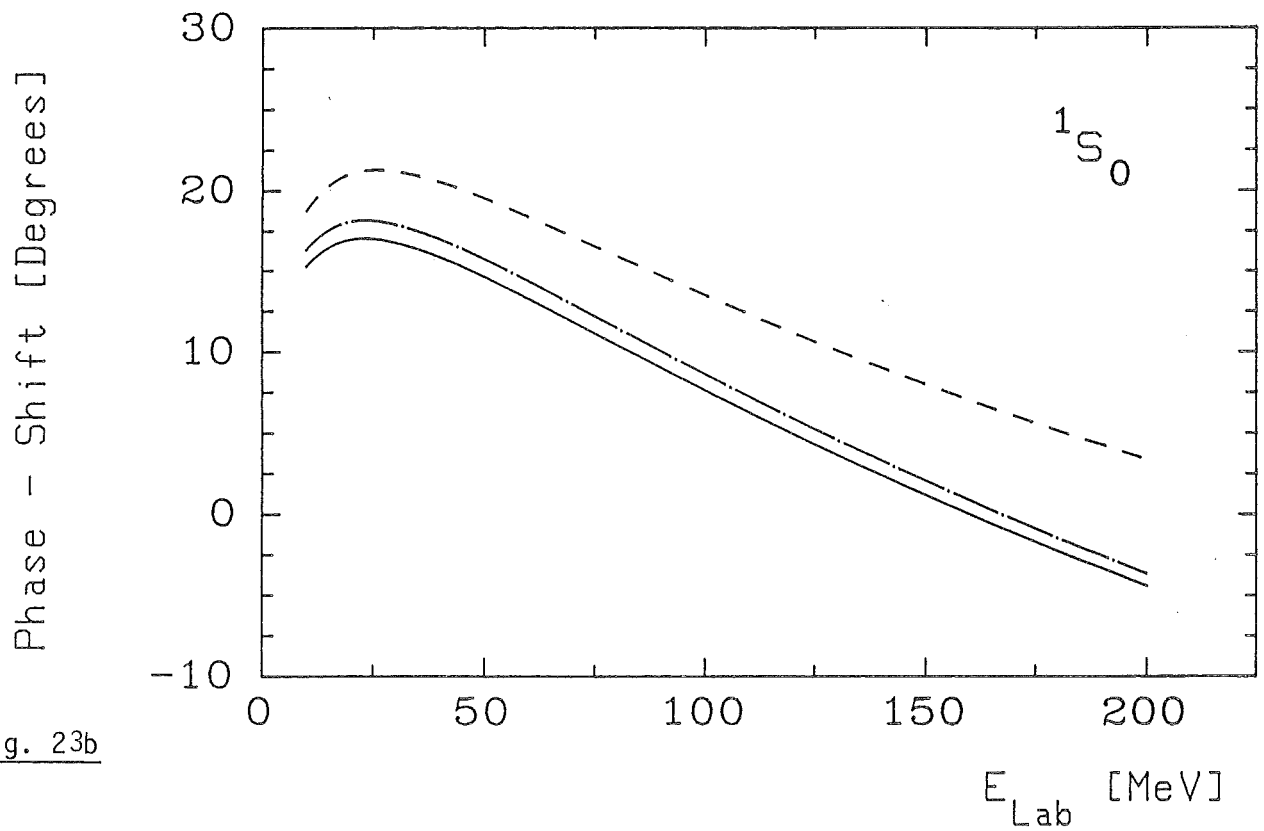
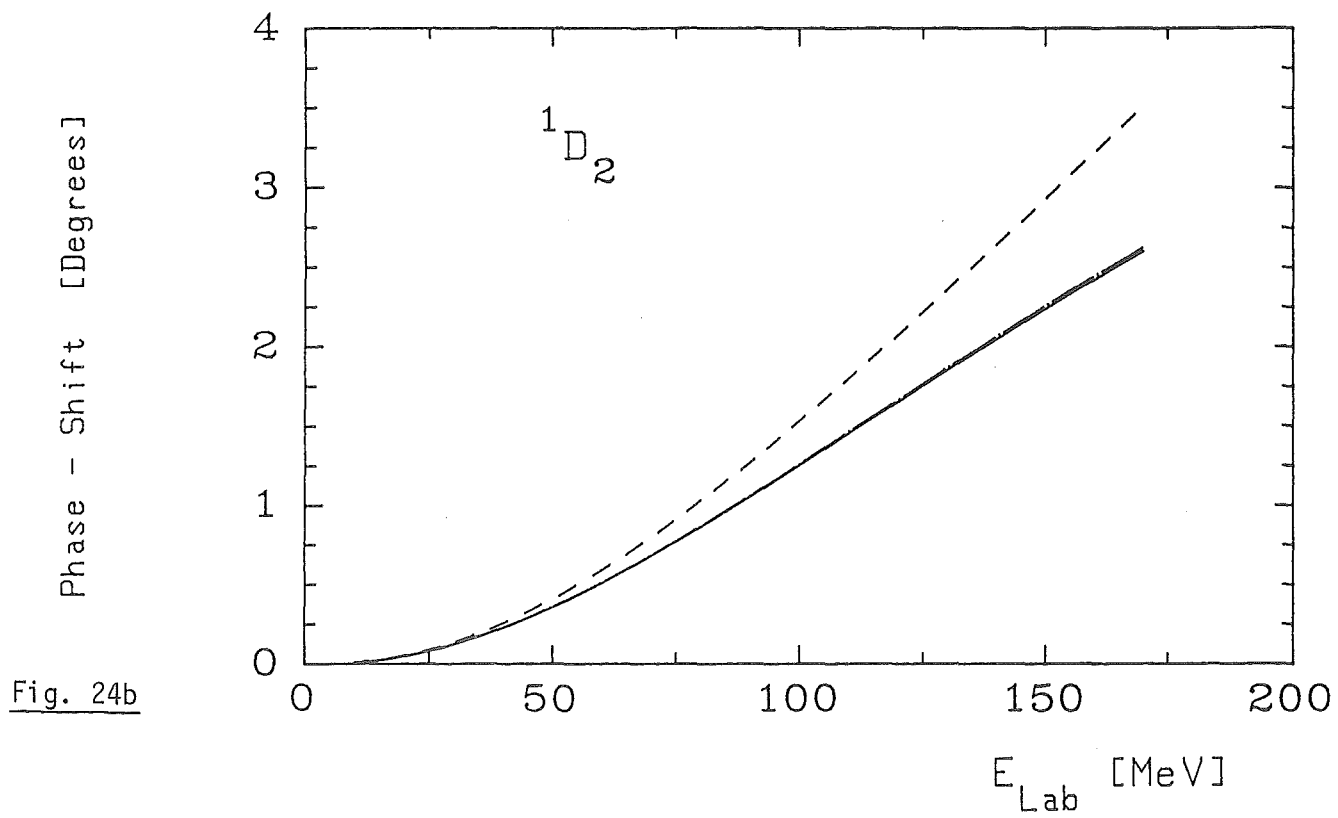
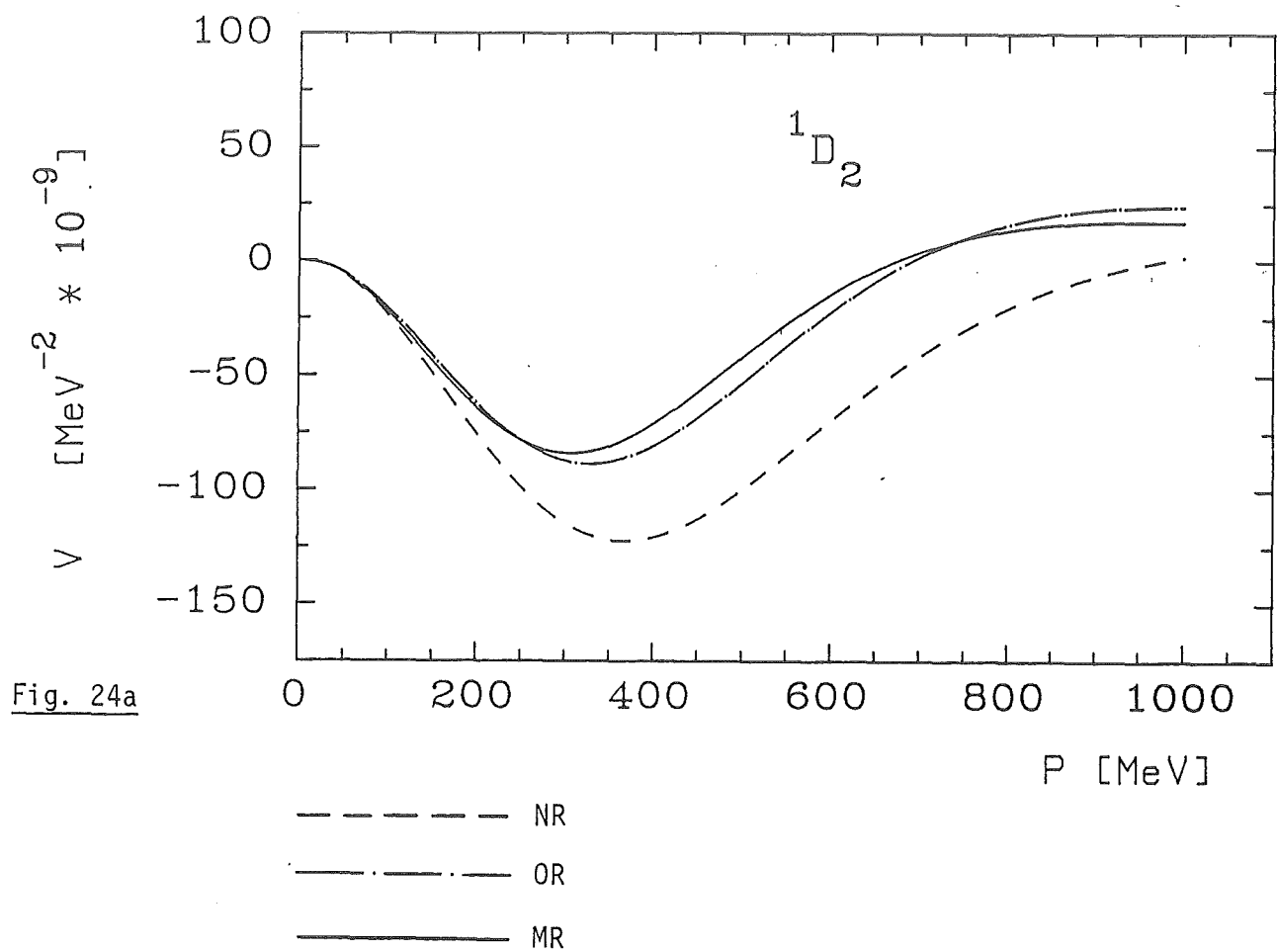


Fig. 23b



Phase - Shift [Degrees]

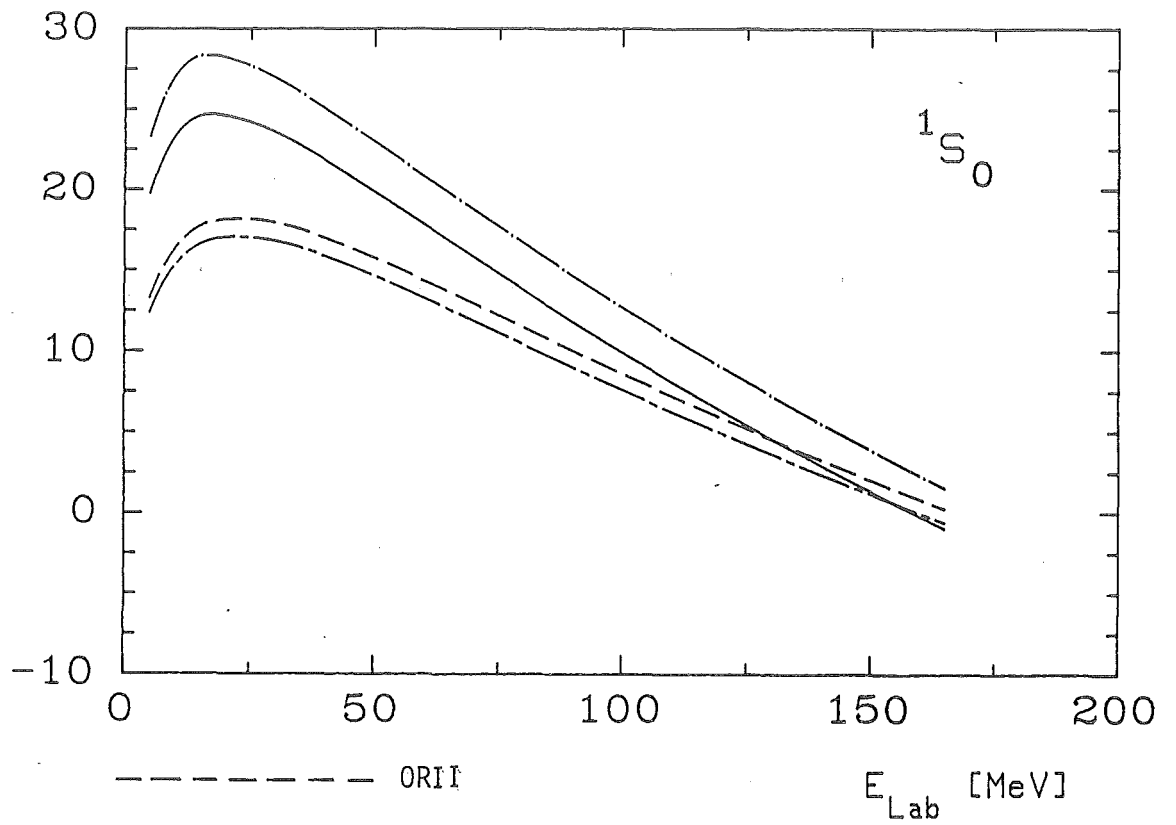


Fig. 25a

--- ORII
- · - ORI (Erläuterungen im Text)
- - - MRII
— MRI

E_{Lab} [MeV]

Phase - Shift [Degrees]

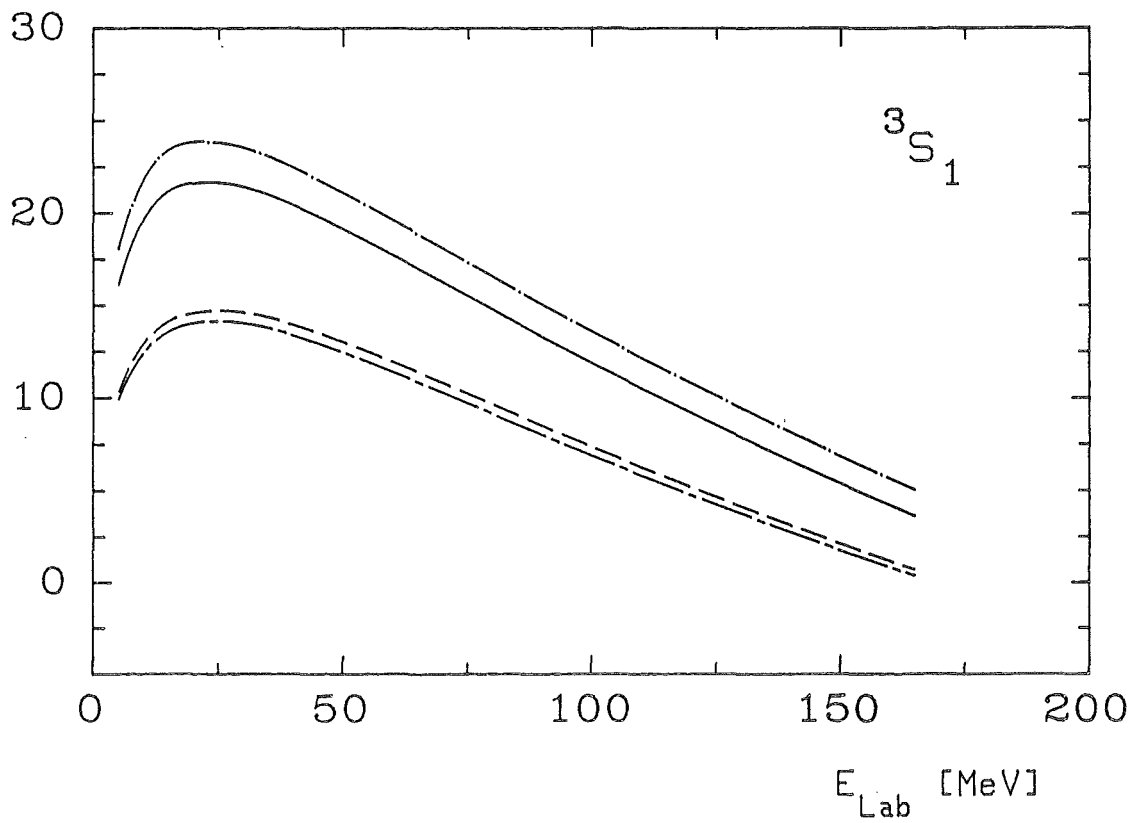
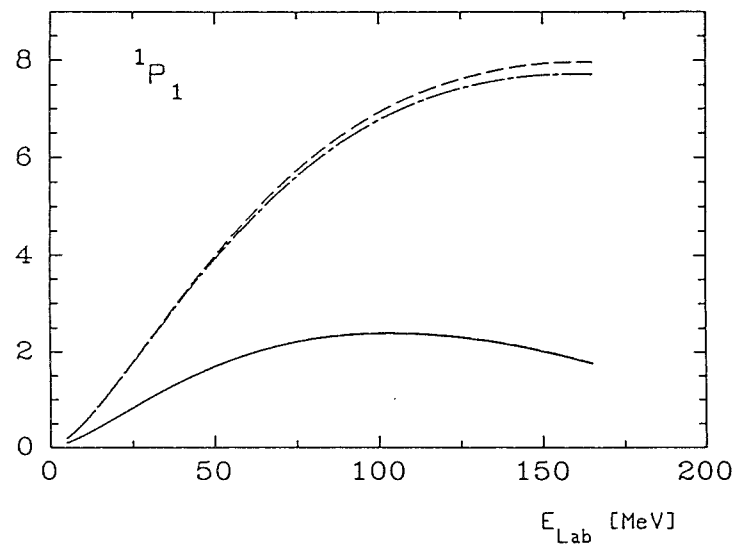
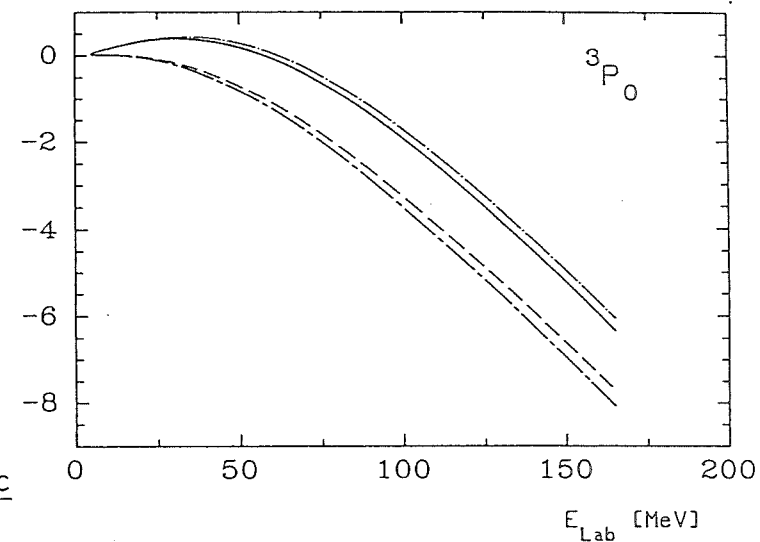


Fig. 25b

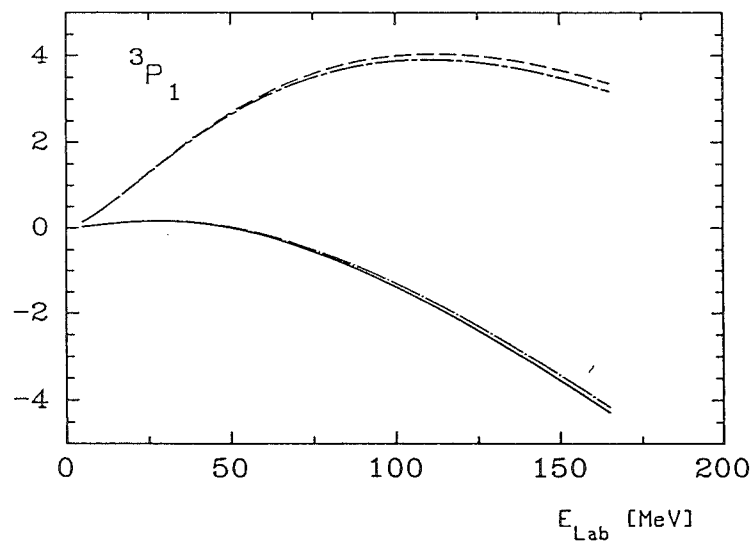
Phase - Shift [Degrees]



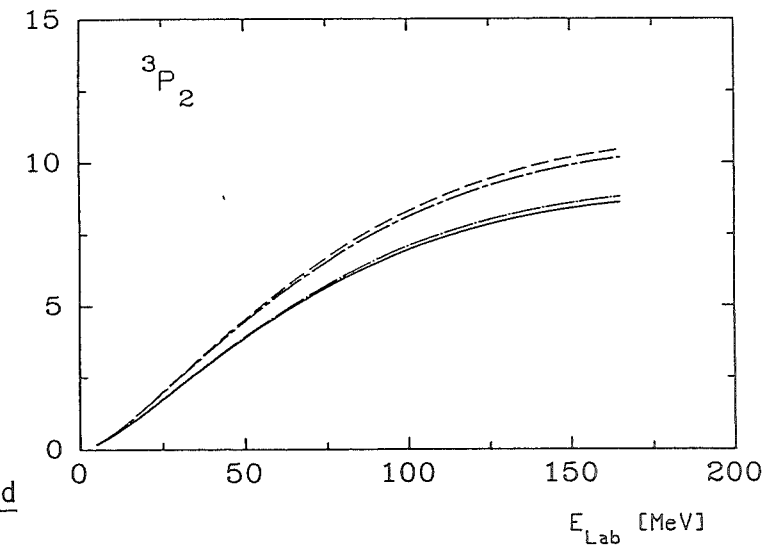
Phase - Shift [Degrees]



Phase - Shift [Degrees]



Phase - Shift [Degrees]



--- ORII
 -.- ORI
 --- MRII
 — MRI

(Erläuterung im Text)

Phase - Shift [Degrees]

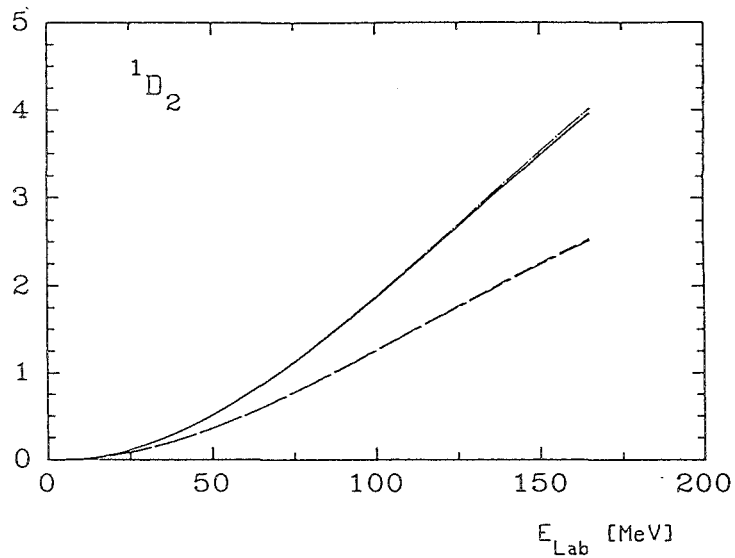


Fig. 27a

Phase - Shift [Degrees]

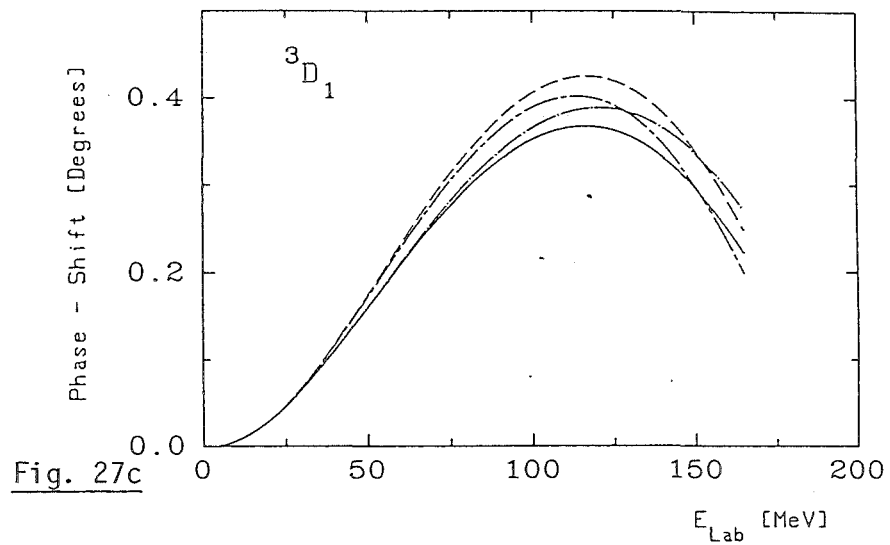


Fig. 27c

Phase - Shift [Degrees]

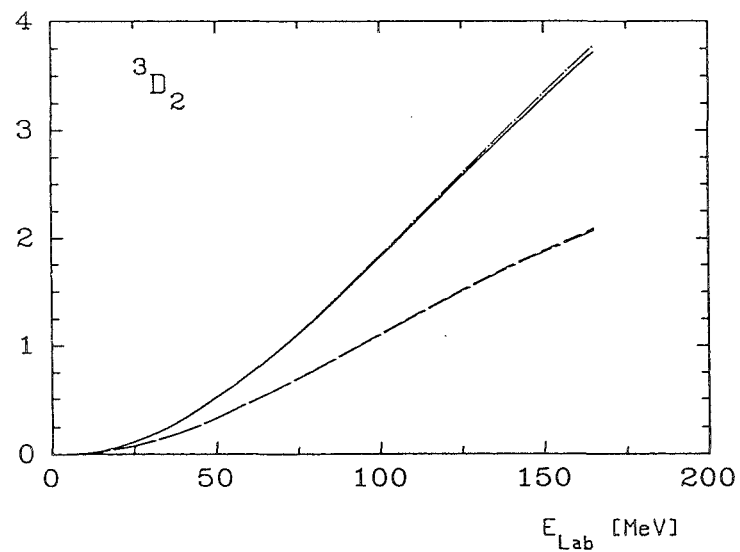
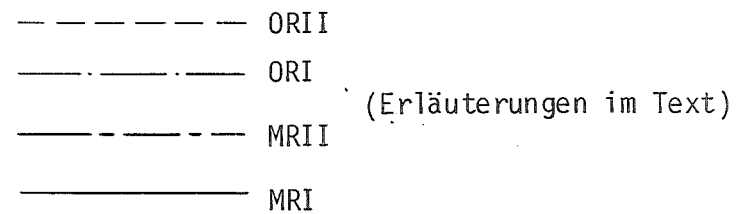


Fig. 27b



5.3 Die Größe der zusätzlichen Box-Diagramme

Um den Beitrag der zusätzlichen Box-Diagramme zur ΛN -Streuung abzuschätzen und um einen Eindruck von den einzelnen Mesonbeiträgen zu den verschiedenen Boxen zu erhalten, wurden die 1S_0 - und die 3S_1 -Partialwellen für verschiedene Mesongruppen berechnet. Außerdem wurde der Einfluß der Retardierungsterme auf die Box-Potentiale untersucht. Die Ergebnisse der Rechnungen sind in den Fig. 28-30 dargestellt. Es ist jeweils die Partialwelle der Box in MeV^{-2} gegen den Relativimpuls der auslaufenden Teilchen aufgetragen.

Die Kurvenbezeichnung sei folgendermaßen vereinbart:

MRTB(1,2,...) - Box-Potential mit Retardierungstermen.

In der Box werden in den möglichen Kombinationen die Mesonen 1,2,... ausgetauscht.

ORTB(1,2,...) - Box-Potential ohne Retardierungsterme.

In der Box werden in den möglichen Kombinationen die Mesonen 1,2,... ausgetauscht.

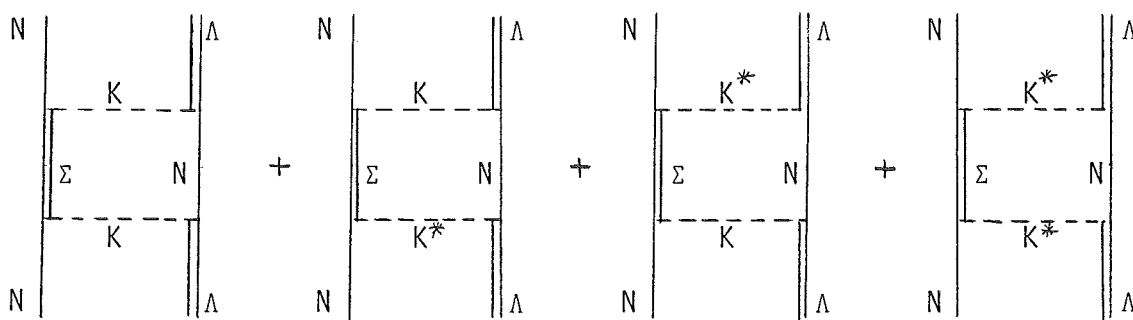
Fig. 28 zeigt die Partialwellen der K-Box und der (K, K^*) -Boxen. Die Beiträge der K-Box sind sehr klein, etwa von der Größenordnung $10^{-10} \text{ MeV}^{-2}$, während die zusätzlichen K^* -Boxen die Attraktion um etwa einen Faktor 10^2 vergrößern. Der Grund dafür ist die kleine Kopplungskonstante des Kaons am $N\Sigma$ -Vertex. Sie beträgt $g_{N\Sigma K} = 0,11$ und sie geht quadratisch in die Berechnung ein.

Die Ergebnisse der OR-Rechnungen zeigen für alle Mesongruppen (Fig. 28-30) stärkere Attraktion in den Partialwellen als die der MR-Rechnungen. Dieses Verhalten ist jedoch leicht zu verstehen, da im OR-Fall die zusätzlichen Retardierungsterme, die im Nenner der Propagatoren auftauchen, vernachlässigt

werden. Dadurch werden die Beiträge betragsmäßig größer. Die Unterschiede in den Resultaten der OR- bzw. MR-Rechnungen stellen sich für die Box-Potentiale als relativ groß heraus, vergleicht man sie mit den entsprechenden Kurven der Ein-Boson-Austauschpotentiale. Dies wird hauptsächlich an der Näherung des Box-Propagators (Gl. (4.9)) liegen, zu der das gleiche zu sagen ist wie zur Greenfunktion der Streugleichung (Gl. (4.4)).

In Fig. 29a sind die 1S_0 -Partialwellen der π -Box und der (π, ρ) -Boxen dargestellt. Die (π, ρ) -Boxen sind dabei um einen Faktor 10^2 stärker als die (K, K^*) -Boxen. Diese großen attraktiven Beiträge entstehen einerseits durch das Potential der ρ -Box - zum 1S_0 -Zustand gibt die ρ -Box allein fast den gleichen Beitrag wie die Summe aller Boxen ohne die Kombination (ρ, ρ) - und zum anderen, größeren Teil durch die geringe Masse des Pions. Dieser zweite Punkt soll kurz erläutert werden. Dazu werden die Größenordnungen der (K, K^*) -Boxen mit denen der (π, ρ) -Boxen über die Kopplungskonstanten und die Massen der beteiligten Teilchen abgeschätzt.

Für die (K, K^*) -Boxen

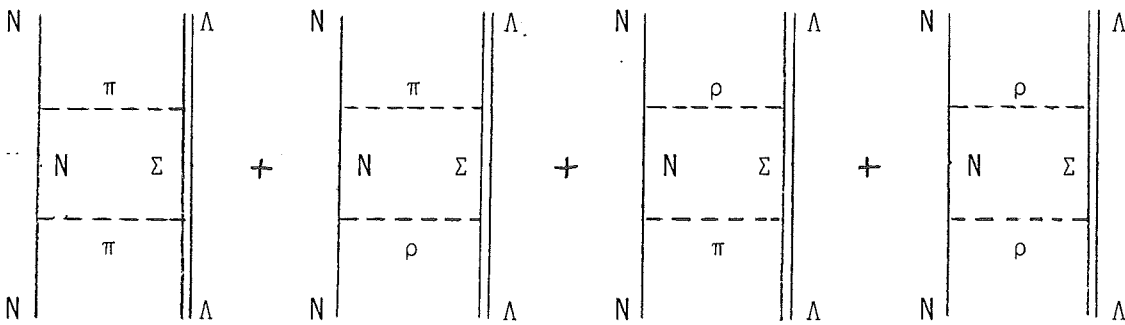


erhält man (betrachtet man nur die Tensorkopplung der Vektormesonen):

$$\frac{g_{N\Sigma K}^2 g_{NAK}^2}{m_K^4 (M_\Sigma - M_\Lambda)} + 2 \cdot \frac{f_{N\Sigma K} g_{N\Sigma K} f_{NAK} g_{NAK}}{m_K^2 m_{K^*}^2 (M_\Sigma - M_\Lambda)} + \frac{f_{N\Sigma K}^2 f_{NAK}^2}{m_{K^*}^4 (M_\Sigma - M_\Lambda)}$$

Dieser Ausdruck ist von der Größenordnung $1 \cdot 10^{-10}$.

Für die entsprechenden (π, ρ) -Boxen



$$\frac{g_{NN\pi}^2 g_{\Lambda\Sigma\pi}^2}{m_\pi^4 (M_\Sigma - M_\Lambda)} + 2 \cdot \frac{f_{NN\rho} g_{NN\pi} f_{\Lambda\Sigma\rho} g_{\Lambda\Sigma\pi}}{m_\rho^2 m_\pi^2 (M_\Sigma - M_\Lambda)} + \frac{f_{NN\rho}^2 f_{\Lambda\Sigma\rho}^2}{m_\rho^4 (M_\Sigma - M_\Lambda)}$$

ergibt sich etwa $1,25 \cdot 10^{-7}$. Man erhält somit einen Unterschied von drei Zehnerpotenzen. Der Hauptgrund für diese Differenz liegt in der Pion-Masse, denn sie geht zur vierten Potenz in die Rechnung ein.

Vergleicht man die Box-Potentiale im 1S_0 -Zustand (Fig. 29a) und im 3S_1 -Zustand (Fig. 29b) miteinander, so stellt man fest, daß die Wechselwirkung im Spin-Singulett-Zustand etwa um einen Faktor 10 größer ist als im Spin-Triplett-Zustand. Dieser Unterschied läßt sich verstehen aufgrund der Struktur der OBEPs für π und ρ (Gl. (2.57), (2.58)). Das Potential, das in den S-Zuständen am stärksten vom Spin abhängig ist, ist das Spin-Spin-Potential. In die Box geht dieses Potential quadratisch ein. Da nun

$$(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)^2 = 3 - 2\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

ist und der Operator $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ für Spin-Singulett-Zustände den Eigenwert -3 und für Spin-Triplett-Zustände den Eigenwert +1 hat, ergibt sich für den 1S_0 -Zustand der Box ein Faktor 9 und für den 3S_1 -Zustand ein Faktor 1.

Fig. 30 zeigt den Verlauf der Potentiale für die Summe aller berücksichtigten Boxen. Da die (K, K^*) -Boxen nur geringe Beiträge geben, unterscheiden sich die Potentiale nicht sehr von denen der (π, ρ) -Boxen. Das 1S_0 -Potential ist für die Summe aller Boxen etwas repulsiver als die (π, ρ) -Boxen allein, was auf die schwachen repulsiven Beiträge der (K, π) -, (K^*, π) -, (K, ρ) -, (K^*, ρ) -Boxen zurückzuführen ist. Außerdem sieht man in Fig. 30 noch einmal den stark attraktiven Einfluß der ρ -Box.

Fig. 28a

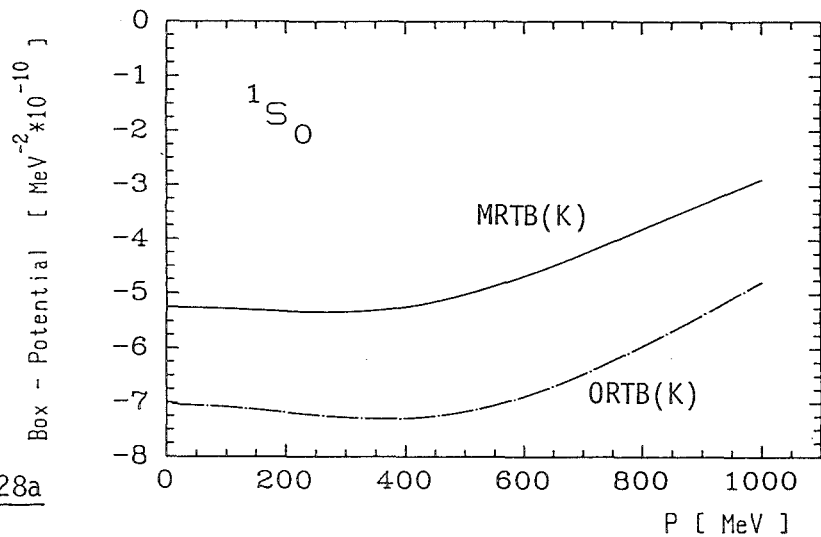
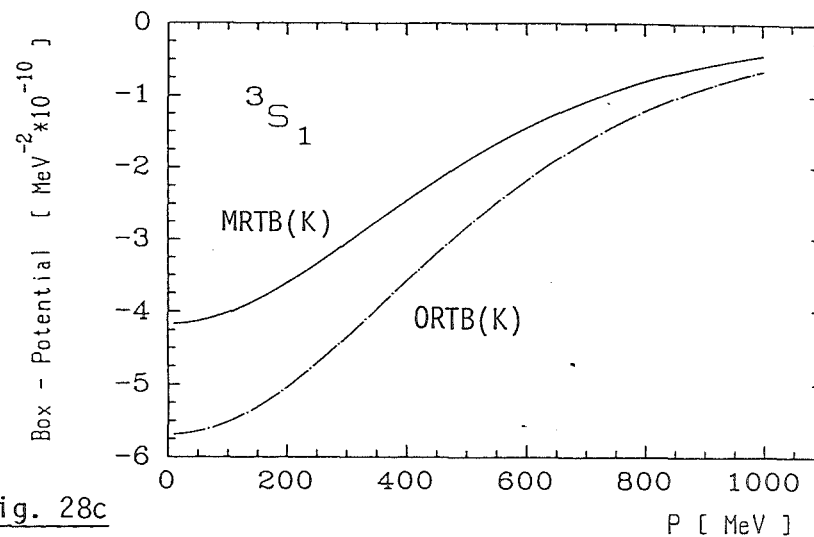


Fig. 28c



(Erläuterungen im Text)

Fig. 28b

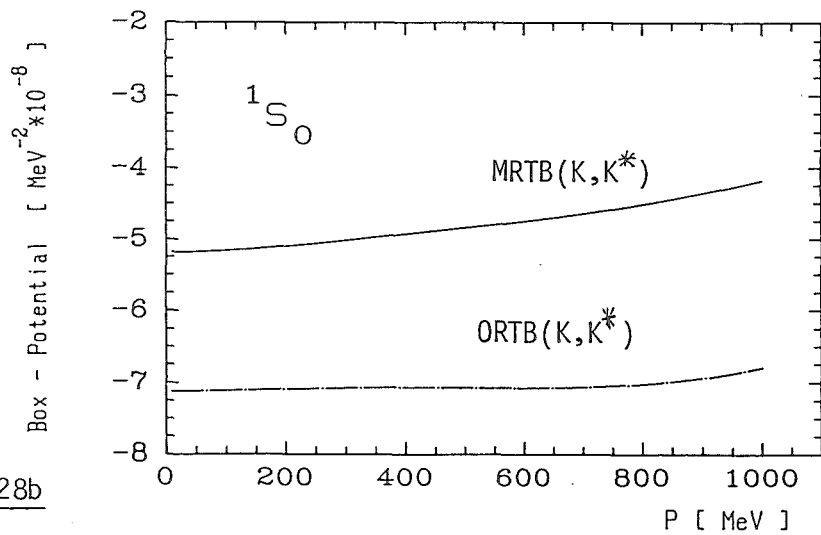
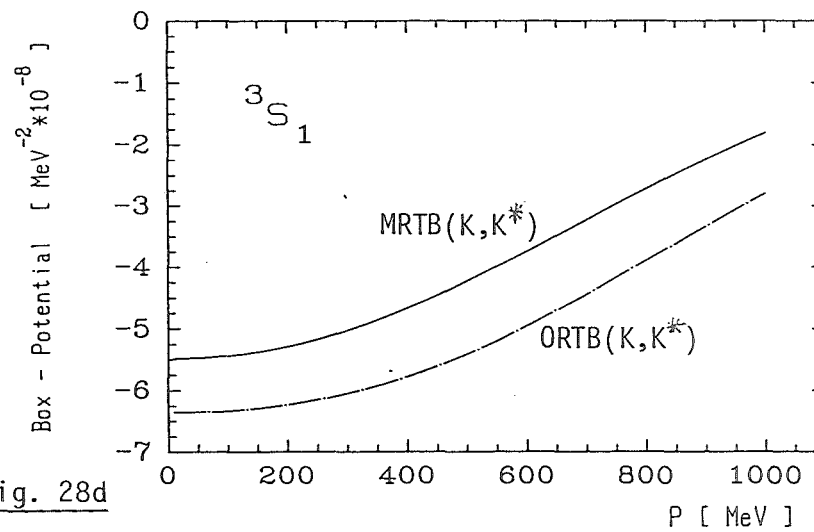
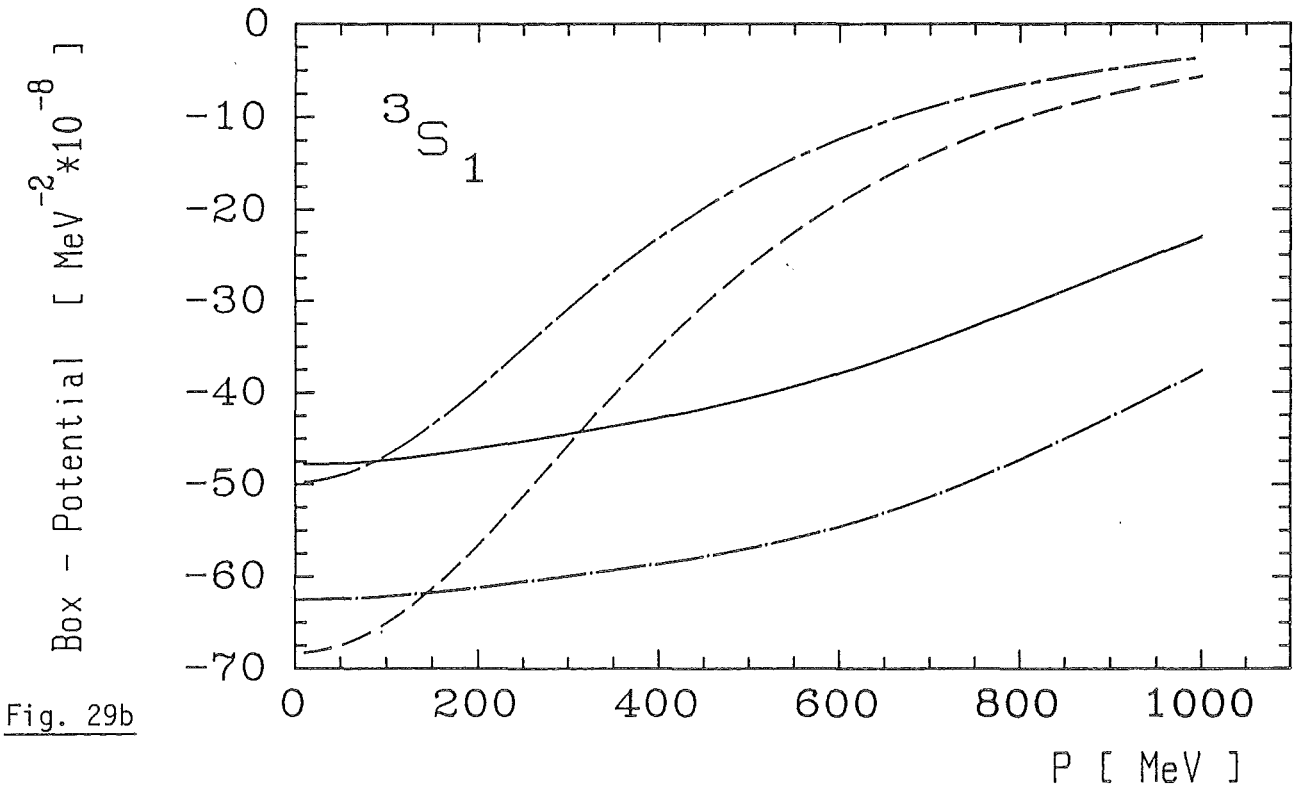
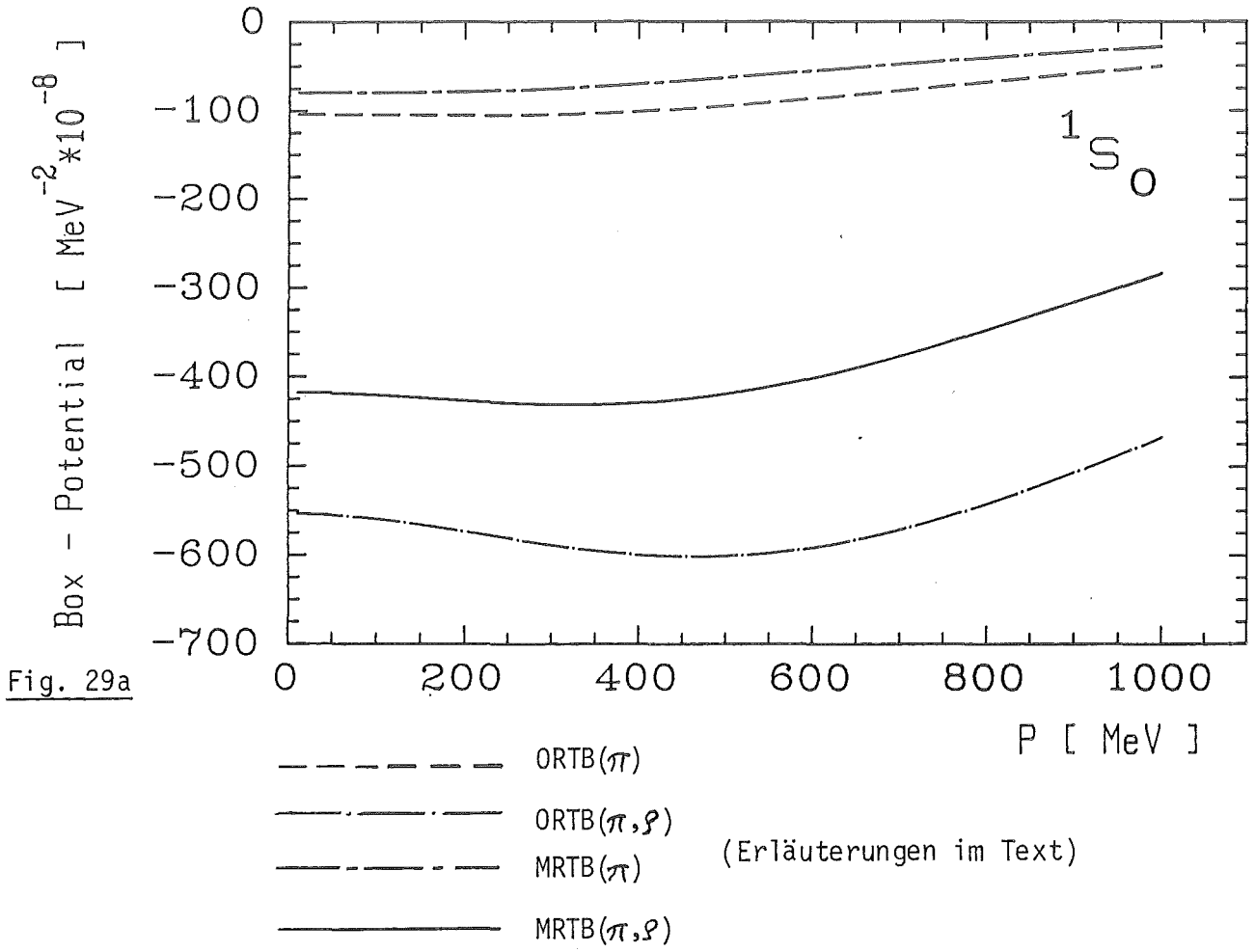
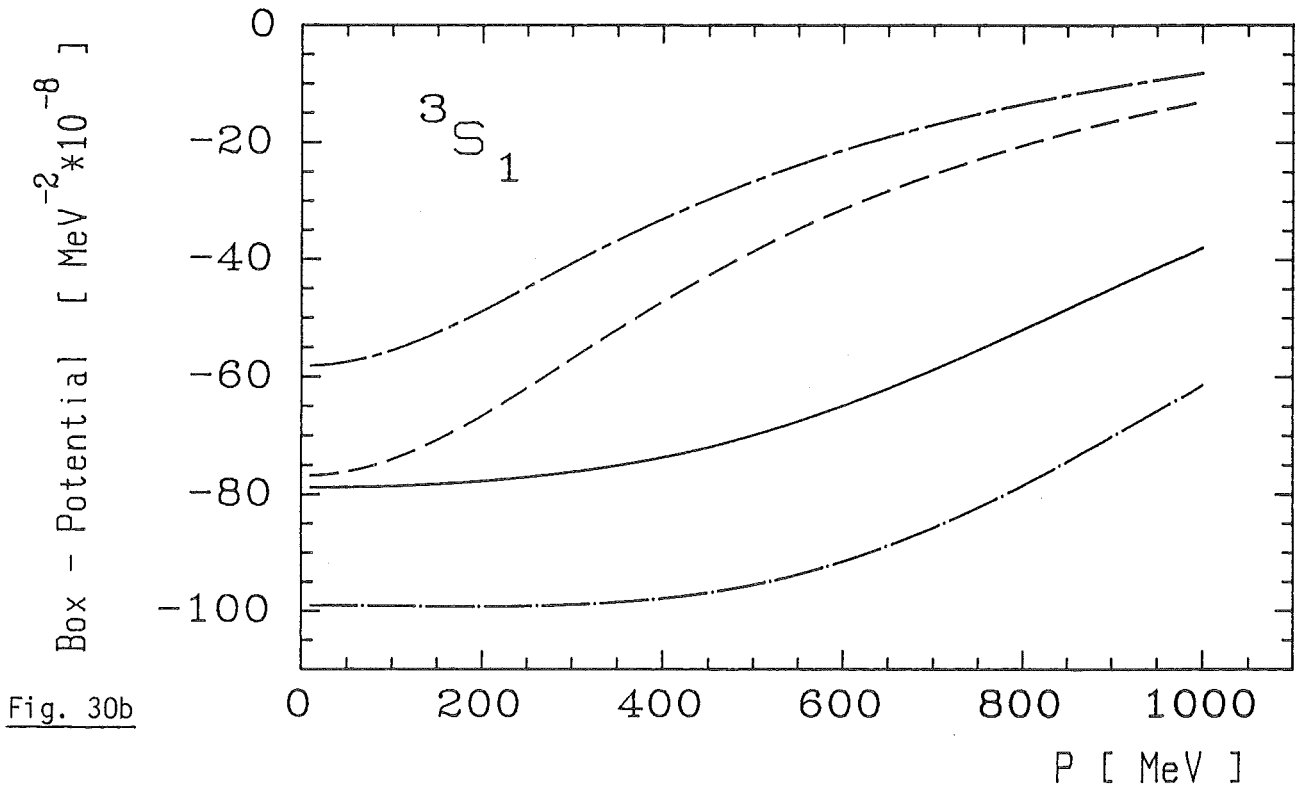
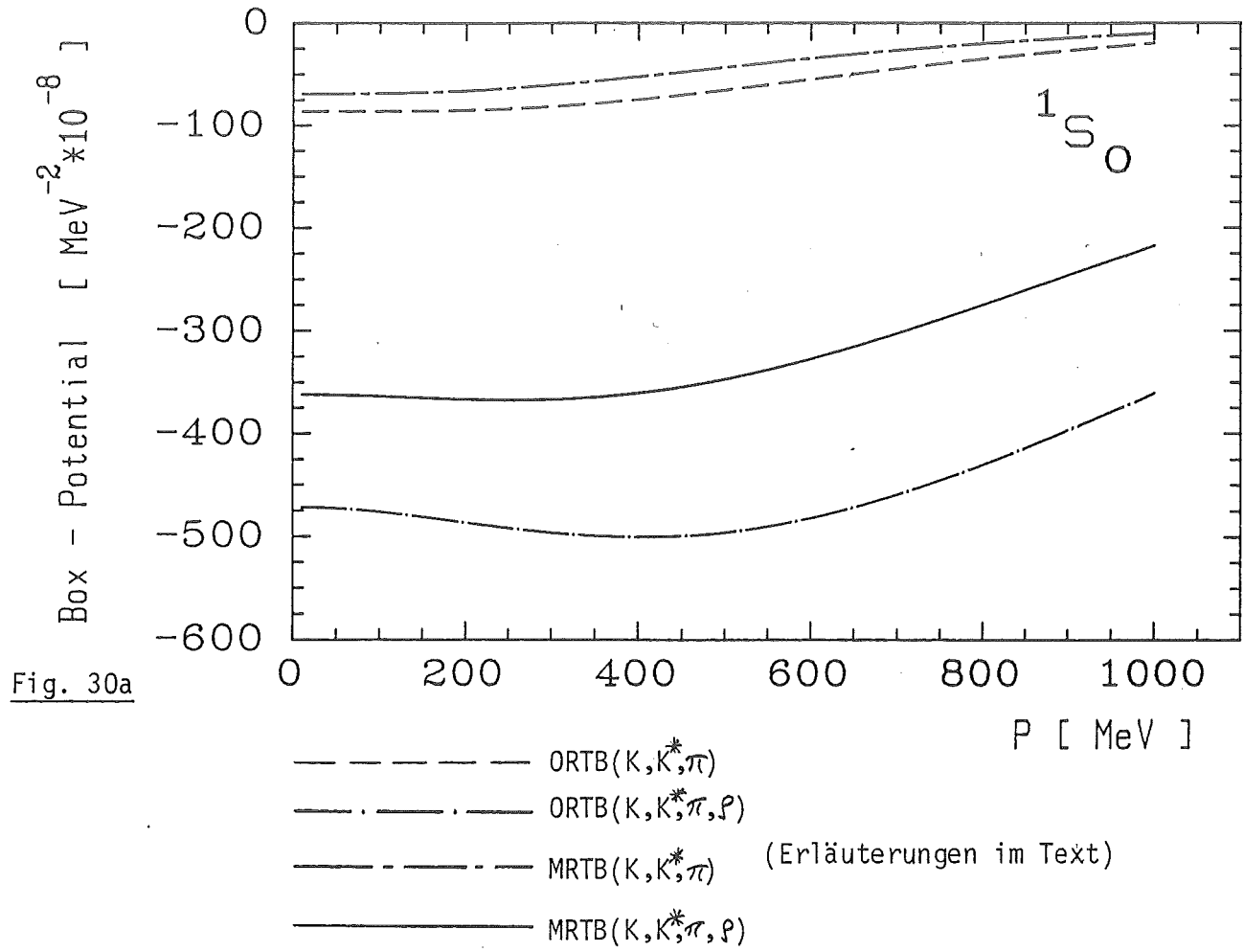


Fig. 28d







5.4 Streuphasen

In den Figuren 31 bis 33 sind die Streuphasen für das ΛN -System bis zum Bahndrehimpuls $L=2$ dargestellt. Es werden wiederum verschiedene Fälle miteinander verglichen. Einerseits soll untersucht werden, inwieweit das effektive skalare σ -Meson und die zusätzlichen Box-Diagramme äquivalente Beschreibungen darstellen, analog zum NN -Fall, wo das σ -Meson den Zwei-Pion-Austausch simuliert, und andererseits soll der Einfluß der Box-Diagramme auf die Streuphasen gezeigt werden. Alle Rechnungen wurden unter Mitnahme der Retardierungsterme durchgeführt.

Zur Bezeichnung der Kurven sei folgende Vereinbarung getroffen:

- | | |
|-----------------|---|
| OB1 | Streuphasen-Rechnung ohne Berücksichtigung zusätzlicher Box-Diagramme. In den OBEPs ist "volles" σ -Meson enthalten. |
| OB2 | Streuphasen-Rechnung ohne Berücksichtigung zusätzlicher Box-Diagramme. In den OBEPs ist "reduziertes" σ -Meson enthalten. |
| OB2+TB(1,2,...) | Streuphasen-Rechnung mit Berücksichtigung der zusätzlichen (1,2,...)-Box-Diagramme. In den OBEPs ist "reduziertes" σ -Meson enthalten. |

In den Rechnungen, in denen zusätzliche Box-Diagramme enthalten sind, wurde die Kopplungskonstante des skalaren σ -Mesons von $g_\sigma = \sqrt{5}$ auf $g_\sigma = 2$ reduziert, um feststellen zu können, ob die dadurch reduzierte Attraktion der ΛN -Wechselwirkung durch die Box-Diagramme kompensiert werden kann. Der Wert $g_\sigma = 2$ wurde gewählt, um die Größenordnung der 1S_0 -Streuphase in der Rechnung mit zusätzlichen Boxen in etwa zu halten, was bis zu einer Laborenergie von etwa 50 MeV gelang.

Die Figuren zeigen, daß die (K, K^*) -Boxen so gut wie keinen Einfluß auf die Streuphasen haben. Ihr minimaler attraktiver Beitrag ist in allen Phasen vernachlässigbar. Der Grund dafür wurde bereits oben diskutiert. Addiert man zusätzlich die (π, ρ) -Boxen hinzu, so ergibt sich in fast allen Phasen eine große Attraktion. Die Ausnahmen davon sind die 3P_2 -, 1D_2 - und 3P_2 -Streuphasen, zu denen die Boxen nur einen relativ geringen Beitrag geben. Der starke Anstieg der 1S_0 -Streuphase bei höheren Laborenergien ist auf die sehr kurzreichweitige ρ -Box zurückzuführen. Das gleiche gilt für die 3D_1 -Streuphase, denn der 3D_1 -Zustand ist an den 3S_1 -Zustand gekoppelt.

Allgemein läßt sich sagen, daß die Box-Diagramme hauptsächlich in den S-Phasen eine Rolle spielen, während für höhere Drehimpulse ihre Beiträge immer kleiner werden.

Ein Vergleich der $(OB2+TB(K, K^*, \pi, \rho))$ - und der OB1-Kurven zeigt, daß es für das ΛN -System nicht gerechtfertigt ist, von einer Äquivalenz zwischen dem skalaren σ -Meson und den Box-Diagrammen zu sprechen. Das σ -Meson wirkt in allen Phasen, besonders in der 3S_1 -Phase, sehr viel attraktiver als die zusätzlichen Boxen. Zwar könnte man durch eine weitere Reduzierung der σ -Kopplung die 3S_1 -Phasen näher zusammenbringen, aber dies würde auch gleichzeitig weniger Attraktion in der 1S_0 -Phase bewirken.

Inwieweit es zur theoretischen Beschreibung der ΛN -Streuung notwendig ist, ein effektives skalares σ -Meson einzuführen, müssen die experimentellen ΛN -Streuphasen zeigen.

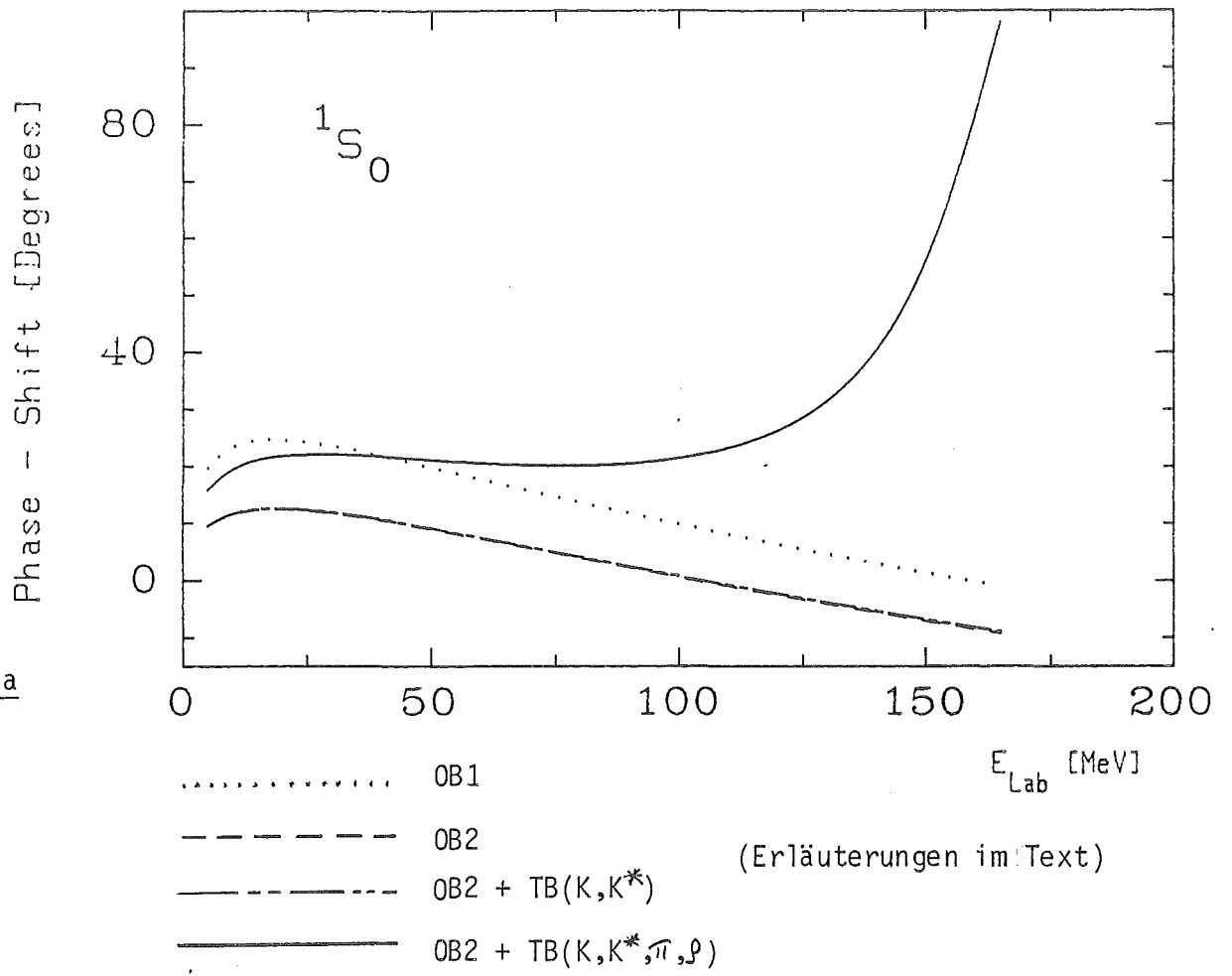


Fig. 31a

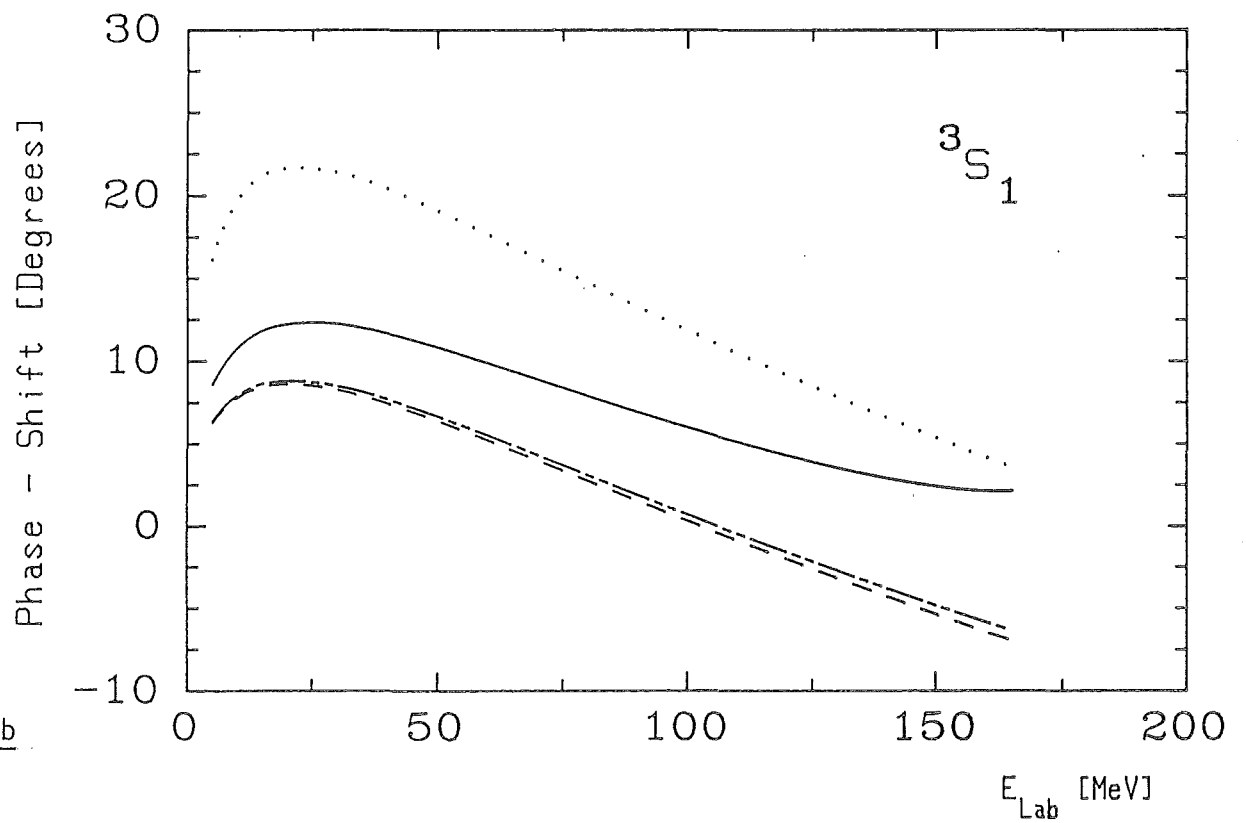
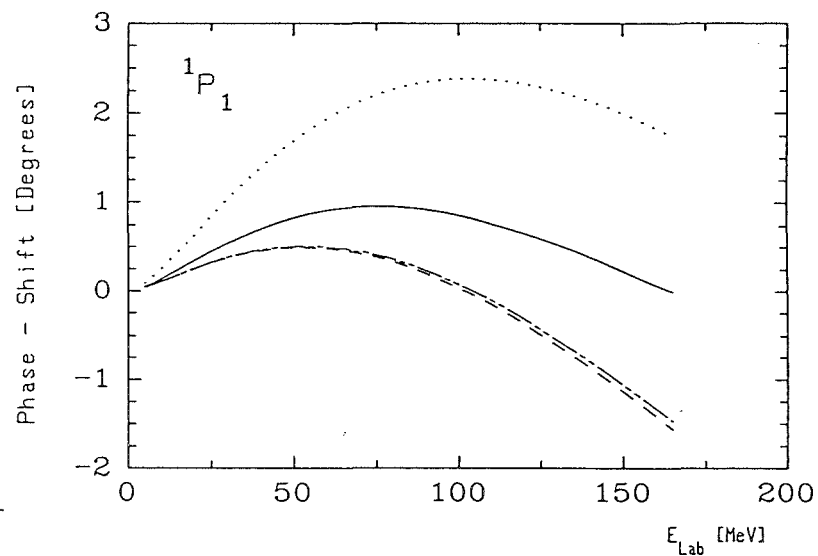


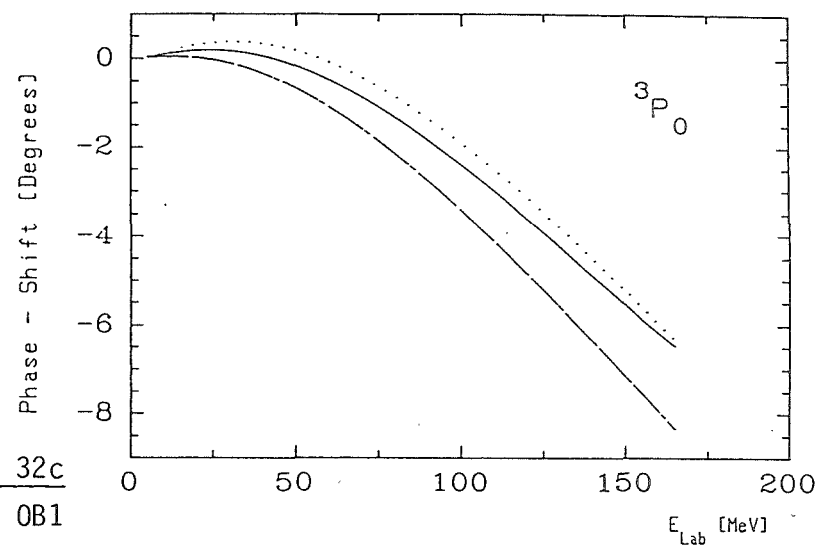
Fig. 31b

Fig. 32a



(Erläuterungen im Text)

Fig. 32c



- OB1
- OB2
- . - . - OB2 + TB(K, K*)
- OB2 + TB(K, K*, π , ρ)

Fig. 32b

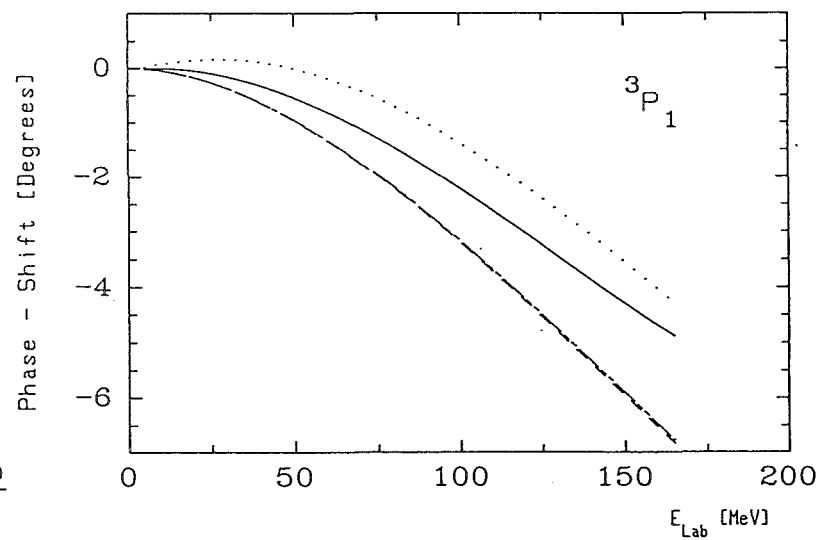


Fig. 32d

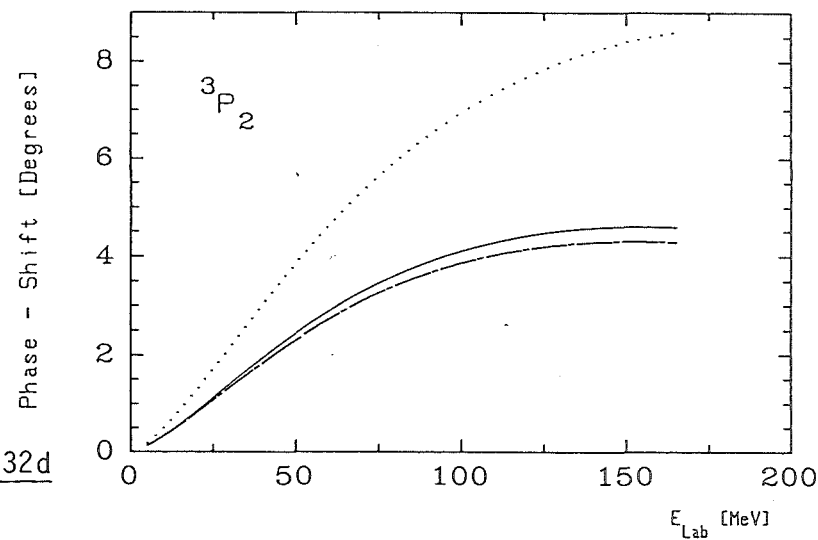


Fig. 33a

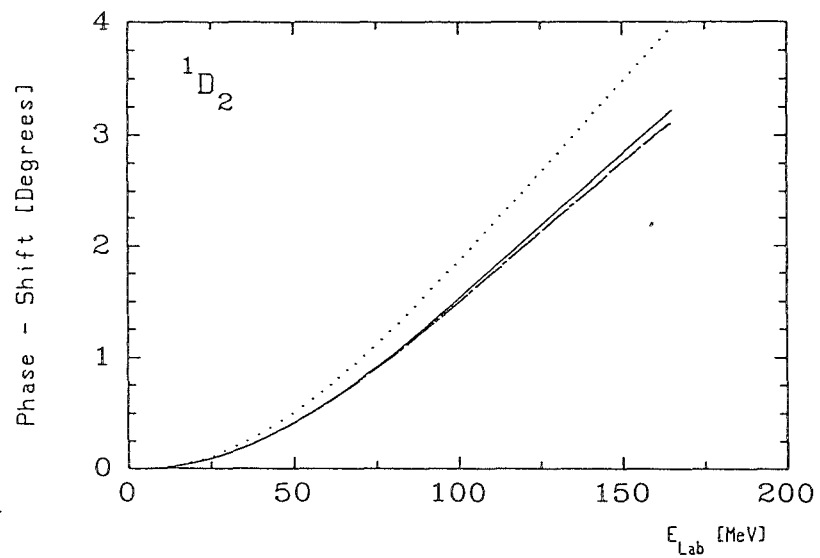


Fig. 33b

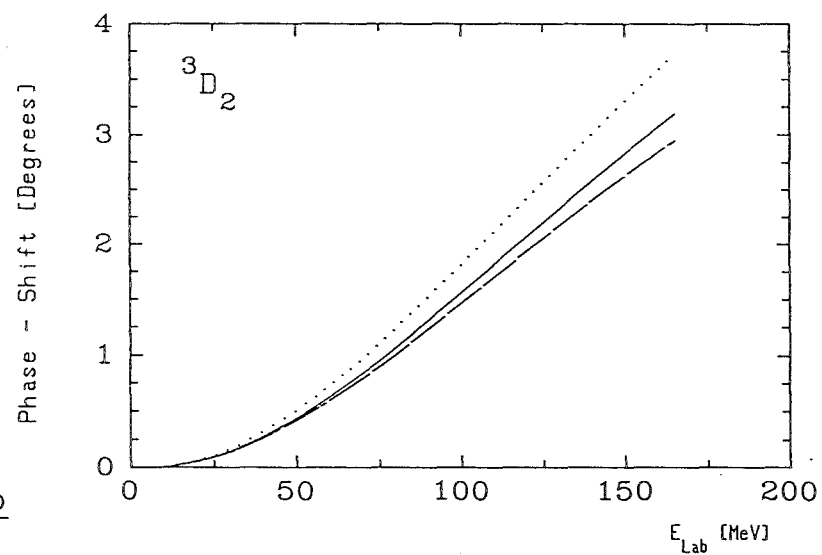
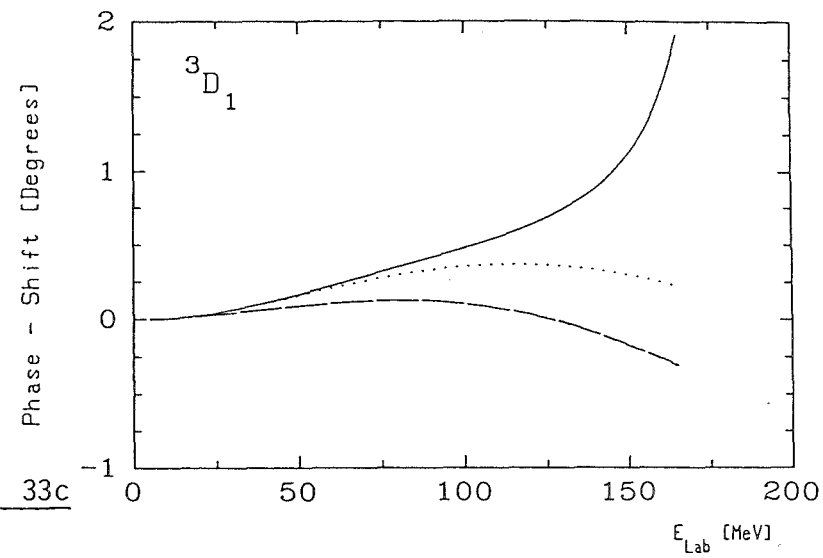


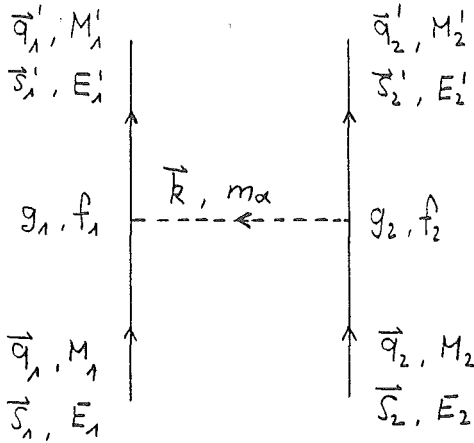
Fig. 33c



- OB1
- OB2
- OB2 + TB(K, K*)
- OB2 + TB(K, K*, π , ρ)

(Erläuterungen im Text)

Verwendete Konventionen:



Dirac - Spinor:

$$u(i) = \left(\frac{E_i + M_i}{2 M_i} \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \chi_{S_i} \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{q}_i}{E_i} \chi_{S_i} \end{pmatrix}$$

$$E_i = E_i + M_i$$

$$E_i = (\vec{q}_i^2 + M_i^2)^{1/2}$$

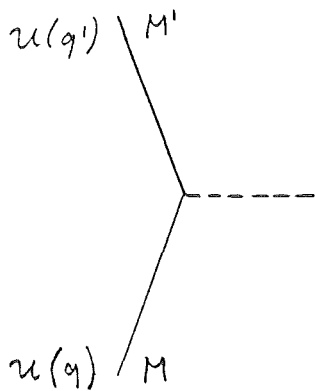
$$\text{Pauli - Matrizen: } \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dirac - Matrizen: } \gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (k=1,2,3)$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\text{Antikommutator: } \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$$



Dirac - Gleichung:

$$(\not{q} - M)u = 0$$

$$\bar{u}(\not{q} - M) = 0$$

$$\bar{u} \sigma^{\mu\nu} (q' - q)_\nu u = \bar{u} \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] (q' - q)_\nu u$$

$$= \frac{i}{2} \left[\bar{u} \gamma^\mu \gamma^\nu q'_\nu u - \underbrace{\bar{u} \gamma^\mu \gamma^\nu q_\nu u}_{= M u} - \underbrace{\bar{u} \gamma^\nu \gamma^\mu q'_\nu u}_{= M' u} + \bar{u} \gamma^\nu \gamma^\mu q_\nu u \right]$$

$$= \frac{i}{2} \left[\bar{u} (2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) q'_\nu u - \bar{u} M \gamma^\mu u - \bar{u} M' \gamma^\mu u + \bar{u} (2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) q_\nu u \right]$$

$$= \frac{i}{2} \left[\bar{u} 2q'^\mu u - \underbrace{\bar{u} \gamma^\nu \gamma^\mu q'_\nu u}_{= M' \bar{u}} - \bar{u} M \gamma^\mu u - \bar{u} M' \gamma^\mu u + \bar{u} 2q^\mu u - \underbrace{\bar{u} \gamma^\mu \gamma^\nu q_\nu u}_{= M u} \right]$$

$$= i \left[\bar{u} (q' + q)^\mu u - \bar{u} (M' + M) \gamma^\mu u \right]$$

$$\Rightarrow \bar{u} \gamma^\mu u = \bar{u} \left[\frac{(q' + q)^\mu}{M + M'} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} (q' - q)_\nu}{M + M'} \right] u$$

Helizitätsmatrixelemente in den OBEPs

a) $\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$

$$|\lambda_1\rangle = \chi_{\lambda_1} \quad ; \quad |\lambda_2\rangle = \chi_{-\lambda_2}$$

$$|\lambda'_1\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_y^1 \vartheta\right) \chi_{\lambda'_1} \quad ; \quad |\lambda'_2\rangle = \exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_y^2 \vartheta\right) \chi_{-\lambda'_2}$$

Mit der Zerlegung:

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\sigma_y \vartheta\right) = \cos \frac{\vartheta}{2} - i \sigma_y \sin \frac{\vartheta}{2}$$

und $\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \langle \lambda'_1 | \lambda_1 \rangle \langle \lambda'_2 | \lambda_2 \rangle$

wird

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 | \lambda_1 \rangle &= \langle \chi_{\lambda'_1} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sigma_y^1 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) | \chi_{\lambda_1} \rangle \\ &= \cos \frac{\vartheta}{2} \langle \chi_{\lambda'_1} | \chi_{\lambda_1} \rangle + i \sin \frac{\vartheta}{2} \langle \chi_{\lambda'_1} | \sigma_y^1 | \chi_{\lambda_1} \rangle \end{aligned}$$

Durch explizites Einsetzen der Pauli-Matrix σ_y und der Pauli-Spinoren $|\chi\rangle$ erhält man:

$$\langle \chi_{\lambda'_1} | \chi_{\lambda_1} \rangle = |\lambda_1 + \lambda'_1|$$

$$i \langle \chi_{\lambda'_1} | \sigma_y^1 | \chi_{\lambda_1} \rangle = (\lambda'_1 - \lambda_1)$$

Die Rechnung für das Matrixelement $\langle \lambda'_2 | \lambda_2 \rangle$ verläuft völlig analog, man ersetzt nur λ_1 bzw. λ'_1 durch $-\lambda_2$ bzw. $-\lambda'_2$.

Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= \left\{ |\lambda'_1 + \lambda_1| \cos \frac{\vartheta}{2} + (\lambda'_1 - \lambda_1) \sin \frac{\vartheta}{2} \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ |\lambda'_2 + \lambda_2| \cos \frac{\vartheta}{2} - (\lambda'_2 - \lambda_2) \sin \frac{\vartheta}{2} \right\} \end{aligned}$$

b)

$$\langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$$

$$= \langle \lambda'_1 | \sigma_1^x | \lambda_1 \rangle \langle \lambda'_2 | \sigma_2^x | \lambda_2 \rangle + \langle \lambda'_1 | \sigma_1^y | \lambda_1 \rangle \langle \lambda'_2 | \sigma_2^y | \lambda_2 \rangle + \langle \lambda'_1 | \sigma_1^z | \lambda_1 \rangle \langle \lambda'_2 | \sigma_2^z | \lambda_2 \rangle$$

Die Berechnungen der einzelnen Matrixelemente verlaufen völlig analog, daher genügt es, sie an einem Beispiel zu demonstrieren.

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 | \sigma_1^x | \lambda_1 \rangle &= \langle \chi_{\lambda'_1} | \left(\cos \frac{\vartheta}{2} + i \sigma_1^y \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \sigma_1^x | \chi_{\lambda_1} \rangle \\ &= \cos \frac{\vartheta}{2} \underbrace{\langle \chi_{\lambda'_1} | \sigma_1^x | \chi_{\lambda_1} \rangle}_{= |\lambda'_1 - \lambda_1|} + \sin \frac{\vartheta}{2} \underbrace{\langle \chi_{\lambda'_1} | i \sigma_1^y \sigma_1^x | \chi_{\lambda_1} \rangle}_{= \underbrace{(-i \sigma_1^z)}_{= \sigma_1^z}} \\ &= \underbrace{(|\lambda'_1 - \lambda_1| + (\lambda'_1 + \lambda_1))}_{= (\lambda'_1 + \lambda_1)} \end{aligned}$$

Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1 \lambda'_2 | \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 | \lambda_1 \lambda_2 \rangle &= - \left\{ (\lambda'_1 + \lambda_1) \sin \frac{\vartheta}{2} + |\lambda'_1 - \lambda_1| \cos \frac{\vartheta}{2} \right\} \left\{ (\lambda'_2 + \lambda_2) \sin \frac{\vartheta}{2} - |\lambda'_2 - \lambda_2| \cos \frac{\vartheta}{2} \right\} \\ &\quad - \left\{ |\lambda'_1 + \lambda_1| \sin \frac{\vartheta}{2} - (\lambda'_1 - \lambda_1) \cos \frac{\vartheta}{2} \right\} \left\{ |\lambda'_2 + \lambda_2| \sin \frac{\vartheta}{2} + (\lambda'_2 - \lambda_2) \cos \frac{\vartheta}{2} \right\} \\ &\quad - \left\{ (\lambda'_1 + \lambda_1) \cos \frac{\vartheta}{2} - |\lambda'_1 - \lambda_1| \sin \frac{\vartheta}{2} \right\} \left\{ (\lambda'_2 + \lambda_2) \cos \frac{\vartheta}{2} + |\lambda'_2 - \lambda_2| \sin \frac{\vartheta}{2} \right\} \end{aligned}$$

Die Kopplungskoeffizienten für den Übergang von der Helizitätsdarstellung
in die $|JMLS\rangle$ - Darstellung

Notation: $\langle JMLS | JM \lambda_1 \lambda_2 \rangle$

$$S=0, L=J : \langle JM J 0 | JM \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle JM J 0 | JM \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = 0$$

$$\langle JM J 0 | JM -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = 0 \quad \langle JM J 0 | JM -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S=1, L=J : \langle JM J 1 | JM \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = 0 \quad \langle JM J 1 | JM \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle JM J 1 | JM -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \langle JM J 1 | JM -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = 0$$

$$S=1, L=J+1 :$$

$$\langle JM J+1 1 | JM \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = -\left(\frac{J+1}{2(2J+1)}\right)^{1/2} \quad \langle JM J+1 1 | JM \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \left(\frac{J}{2(2J+1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle JM J+1 1 | JM -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \left(\frac{J}{2(2J+1)}\right)^{1/2} \quad \langle JM J+1 1 | JM -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = -\left(\frac{J+1}{2(2J+1)}\right)^{1/2}$$

$$S=1, L=J-1 :$$

$$\langle JM J-1 1 | JM \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \left(\frac{J}{2(2J+1)}\right)^{1/2} \quad \langle JM J-1 1 | JM \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \left(\frac{J+1}{2(2J+1)}\right)^{1/2}$$

$$\langle JM J-1 1 | JM -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \left(\frac{J+1}{2(2J+1)}\right)^{1/2} \quad \langle JM J-1 1 | JM -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \left(\frac{J}{2(2J+1)}\right)^{1/2}$$

Anhang 2

Die F - Koeffizienten aus Kap. 2.2.1, Gl. 2.30

$$^{\circ} \overline{F}_{g_1 g_2}^I = 1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{E_2' E_2} + 3 \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right)$$

$$^{\circ} \overline{F}_{g_1 g_2}^{II} = q' q \left(\frac{1}{E_1'} - \frac{1}{E_2'} \right) \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)$$

$$^{\circ} \overline{F}_{g_1 f_2}^I = (M_2' + M_2) \left[1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{E_2' E_2} + 3 \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \right] \\ - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1) + (E_2' - M_2')(E_2 - M_2) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} \right)$$

$$^{\circ} \overline{F}_{g_1 f_2}^{II} = q' q \left[(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_1'} - \frac{1}{E_2'} \right) \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) - \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} - \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1}{E_2' E_2} \right) \right]$$

$$^{\circ} \overline{F}_{g_2 f_1}^I = (M_1' + M_1) \left[1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{E_2' E_2} + 3 \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \right] \\ - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2) + (E_1' - M_1')(E_1 - M_1) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} \right)$$

$$^{\circ} \overline{F}_{g_2 f_1}^{II} = q' q \left[(M_1' + M_1) \left(\frac{1}{E_1'} - \frac{1}{E_2'} \right) \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) - \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} - \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2}{E_1' E_1} \right) \right]$$

$$^{\circ} \overline{F}_{f_1 f_2}^I = \left((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + (M_1' + M_1)(M_2' + M_2) + q'^2 + q^2 \right) \left(1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{E_2' E_2} \right) \\ + 3 (M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \\ - (M_1' + M_1) \left(E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1 - (E_2' - M_2')(E_2 - M_2) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} \right) \right) \\ - (M_2' + M_2) \left(E_1' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2 - (E_1' - M_1')(E_1 - M_1) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 {}^0 \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{II}} &= q'q \left[(M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{\varepsilon_1'} - \frac{1}{\varepsilon_2'} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - (M_1' + M_1) \left(\frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1'} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_1' - M_1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - (M_2' + M_2) \left(\frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2'} + \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_2' - M_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left(1 + \frac{(\varepsilon_1' - M_1')(\varepsilon_1 - M_1)}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) - ((\varepsilon_1' + \varepsilon_1)(\varepsilon_2' + \varepsilon_2) + q'^2 + q^2) \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$${}^0 \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{III}} = -2 \left((\varepsilon_1' - M_1')(\varepsilon_1 - M_1) + (\varepsilon_2' - M_2')(\varepsilon_2 - M_2) \right)$$

$${}^{12} \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{I}} = q'q \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} + 3 \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_1} \right) \right)$$

$${}^{12} \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{II}} = \left(1 - \frac{\varepsilon_1' - M_1'}{\varepsilon_2'} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - M_1}{\varepsilon_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 {}^{12} \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{I}} &= q'q \left[(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} + 3 \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_1} \right) \right) - \left(\frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1'} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_1' - M_1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{12} \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{II}} &= (M_2' + M_2) \left(1 - \frac{\varepsilon_1' - M_1'}{\varepsilon_2'} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - M_1}{\varepsilon_2} \right) - (\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_1' - M_1) \\
 &\quad + (\varepsilon_2' - M_2')(\varepsilon_2 - M_2) \left(\frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1'} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{12} \overline{F}_{g_2 g_1}^{\text{I}} &= q'q \left[(M_1' + M_1) \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} + 3 \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_1} \right) \right) - \left(\frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2'} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_2' - M_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} \right]
 \end{aligned}$$

$$^{12} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_1}^{\overline{\Pi}} = (M_1' + M_1) \left(1 - \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2) \\ + (E_1' - M_1')(E_1 - M_1) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} \right)$$

$$^{12} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{\overline{\Pi}} = q'q \left[(M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} + 3 \left(\frac{1}{E_1' E_2} + \frac{1}{E_2' E_1} \right) \right) \right. \\ - (M_1' + M_1) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} - \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_1}{E_2' E_2} \right) \\ - (M_2' + M_2) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} - \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2}{E_1' E_1} \right) \\ \left. - \left((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + q'^2 + q^2 \right) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right]$$

$$^{12} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{\overline{\Pi}} = (M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(1 - \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) - (M_1' + M_1)(E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_1) \\ + (M_1' + M_1)(E_2' - M_2')(E_2 - M_2) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} \right) \\ - (M_2' + M_2)(E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2) + (M_2' + M_2)(E_1' - M_1')(E_1 - M_1) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} \right) \\ + \left((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + q'^2 + q^2 \right) \left(1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{E_2' E_2} \right) \\ - 2 \left((E_1' - M_1')(E_1 - M_1) + (E_2' - M_2')(E_2 - M_2) \right)$$

$$^{12} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{\overline{\Pi}} = 2 q'q \left(1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{E_2' E_2} \right)$$

$$^1 \overline{F}_{g_1 g_2}^I = \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'}\right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2}\right)$$

$$^1 \overline{F}_{g_1 g_2}^{II} = q' q \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'}\right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)$$

$$^1 \overline{F}_{g_1 \uparrow_2}^I = (M_2' + M_2) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'}\right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2}\right) - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1) \\ + (E_2' - M_2') (E_2 - M_2) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1}\right)$$

$$^1 \overline{F}_{g_1 \uparrow_2}^{II} = q' q \left[(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'}\right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) - \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1}\right) \right. \\ \left. + \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1}{E_2' E_2} \right]$$

$$^1 \overline{F}_{g_2 \uparrow_1}^I = (M_1' + M_1) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'}\right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2}\right) - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_2) \\ + (E_1' - M_1') (E_1 - M_1) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2}\right)$$

$$^1 \overline{F}_{g_2 \uparrow_1}^{II} = q' q \left[(M_1' + M_1) \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'}\right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) - \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2}\right) \right. \\ \left. + \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_2}{E_1' E_1} \right]$$

$$^1 \overline{F}_{\uparrow_1 \uparrow_2}^I = (M_1' + M_1) (M_2' + M_2) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'}\right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2}\right) \\ - (M_1' + M_1) (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1 - (E_2' - M_2') (E_2 - M_2) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1}\right)) \\ - (M_2' + M_2) (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_2 - (E_1' - M_1') (E_1 - M_1) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2}\right)) \\ + ((E_1' + E_1) (E_2' + E_2) + q'^2 + q^2) \left(1 + \frac{(E_1' - M_1') (E_1 - M_1)}{E_2' E_2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 1 \quad \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{\text{II}} &= q'q \left[(M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) - (M_1' + M_1) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} \right) \right. \\
 &\quad + (M_1' + M_1) \frac{E_2' + E_2' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1}{E_2' E_2} - (M_2' + M_2) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} \right) \\
 &\quad \left. + (M_2' + M_2) \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2}{E_1' E_1} - \left((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + q'^2 + q^2 \right) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$1 \quad \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{\text{III}} = 2 q'q \left(1 + \frac{(E_1' - M_1')(E_1 - M_1)}{E_2' E_2} \right)$$

$$1 \quad \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{\text{IV}} = -2 \left((E_1' - M_1')(E_1 - M_1) + (E_2' - M_2')(E_2 - M_2) \right)$$

$$34 \quad \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{I}} = q'q \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

$$34 \quad \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{II}} = \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right)$$

$$34 \quad \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{I}} = q'q \left[(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) - \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} \right) + \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1}{E_2' E_2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 34 \quad \overline{F}_{g_1 g_2}^{\text{II}} &= (M_2' + M_2) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) + (E_2' - M_2')(E_2 - M_2) \left(\frac{E_2' + E_2}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_1} \right) \\
 &\quad - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_1' - M_1)
 \end{aligned}$$

$$34 \quad \overline{F}_{g_2 g_1}^{\text{I}} = q'q \left[(M_1' + M_1) \left(\frac{1}{E_1'} + \frac{1}{E_2'} \right) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) - \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} \right) + \frac{E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2}{E_1' E_1} \right]$$

$$\begin{aligned}
 34 \quad \overline{F}_{g_2 g_1}^{\text{II}} &= (M_1' + M_1) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) + (E_1' - M_1')(E_1 - M_1) \left(\frac{E_1' + E_1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_2} \right) \\
 &\quad - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1 - M_2' - M_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{34} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^I &= q'q \left[(M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{\varepsilon_1'} + \frac{1}{\varepsilon_2'} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \right. \\
 &\quad - (M_1' + M_1) \left(\frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1'} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + (M_1' + M_1) \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_1' - M_1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \\
 &\quad - (M_2' + M_2) \left(\frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2'} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + (M_2' + M_2) \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_2' - M_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} \\
 &\quad \left. - \left((\varepsilon_1' + \varepsilon_1)(\varepsilon_2' + \varepsilon_2) + q'^2 + q^2 \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{34} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{II} &= (M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(1 + \frac{\varepsilon_1' - M_1'}{\varepsilon_2'} \right) \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - M_1}{\varepsilon_2} \right) \\
 &\quad + (M_1' + M_1)(\varepsilon_2' - M_2')(\varepsilon_2 - M_2) \left(\frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1'} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) - (M_1' + M_1)(\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_1' - M_1) \\
 &\quad + (M_2' + M_2)(\varepsilon_1' - M_1')(\varepsilon_1 - M_1) \left(\frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2'} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) - (M_2' + M_2)(\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - M_2' - M_2) \\
 &\quad + \left((\varepsilon_1' + \varepsilon_1)(\varepsilon_2' + \varepsilon_2) + q'^2 + q^2 \right) \left(1 + \frac{(\varepsilon_1' - M_1')(\varepsilon_1 - M_1)}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right)
 \end{aligned}$$

$${}^{34} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{III} = -2 \left((\varepsilon_1' - M_1')(\varepsilon_1 - M_1) + (\varepsilon_2' - M_2')(\varepsilon_2 - M_2) \right)$$

$${}^{34} \overline{F}_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{IV} = 2q'q \left(1 + \frac{(\varepsilon_1' - M_1')(\varepsilon_1 - M_1)}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right)$$

$${}^2 \overline{F}_{g_1 g_2} = q'q \left(\frac{1}{\varepsilon_2'} - \frac{1}{\varepsilon_1'} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 {}^2 \overline{F}_{g_1 \downarrow_2} &= q'q \left[(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{\varepsilon_2'} - \frac{1}{\varepsilon_1'} \right) \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + (M_1' + M_1) \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (\varepsilon_2' + \varepsilon_1' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1) \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$${}^2 F_{g_1 g_1} = q'q \left[(M_1' + M_1) \left(\frac{1}{E_2'} - \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) + (M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} {}^2 F_{g_1 g_2}^I &= q'q \left[(M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_2'} - \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_1} \right) + (M_1' + M_1)^2 \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right. \\ &\quad + (M_1' + M_1)(E_2' + E_1' + E_2 + E_1) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) + (M_2' + M_2)^2 \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) \\ &\quad \left. - (M_2' + M_2)(E_2' + E_1' + E_2 + E_1) \left(\frac{1}{E_1' E_2} + \frac{1}{E_1' E_1} \right) + ((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + q'^2 + q^2) \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right] \end{aligned}$$

$${}^2 F_{g_1 g_2}^{II} = 2((E_1' - M_1')(E_1 - M_1) - (E_2' - M_2')(E_2 - M_2))$$

$${}^{57} F_{g_1 g_2} = - \left(1 - \frac{E_2' - M_2'}{E_1'} \right) \left(1 + \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right)$$

$$\begin{aligned} {}^{57} F_{g_1 g_2} &= - (M_2' + M_2) \left(1 - \frac{E_2' - M_2'}{E_1'} \right) \left(1 + \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) + (M_2' - M_2) \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \\ &\quad + (E_2' + E_2) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_1'} \right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{57} F_{g_2 g_1} &= - (M_1' + M_1) \left(1 - \frac{E_2' - M_2'}{E_1'} \right) \left(1 + \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) + (M_1' - M_1) \left(\frac{E_2' - M_2'}{E_1'} - \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) \\ &\quad + (E_1' + E_1) \left(1 + \frac{E_2' - M_2'}{E_1'} \right) \left(1 + \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^{57} F_{g_1 g_2}^I &= - (M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(1 - \frac{E_2' - M_2'}{E_1'} \right) \left(1 + \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) \\ &\quad + (M_1' + M_1)(M_2' - M_2) \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) + (M_1' + M_1)(E_2' + E_2) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 + \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \\ &\quad + (M_2' + M_2)(M_1' - M_1) \left(\frac{E_2' - M_2'}{E_1'} - \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) + (M_2' + M_2)(E_1' + E_1) \left(1 + \frac{E_2' - M_2'}{E_1'} \right) \left(1 + \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) \\ &\quad - ((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + q'^2 + q^2) \left(1 - \frac{(E_1' - M_1')(E_2 - M_2)}{E_1' E_1} \right) \end{aligned}$$

$$57 \overline{F_{\downarrow\downarrow_2}} = -2q'q \left(1 - \frac{(E_2' - M_2')(E_2 - M_2)}{E_1' E_1} \right)$$

$$3 \overline{F_{g_2}} = q'q \left(\frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right)$$

$$3 \overline{F_{g_2\downarrow_2}} = q'q \left[(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) + (M_1' + M_1) \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) + (E_2' + E_1' + E_2 + E_1) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right]$$

$$3 \overline{F_{g_2\downarrow_1}} = q'q \left[(M_1' + M_1) \left(\frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) + (M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) - (E_2' + E_1' + E_2 + E_1) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right]$$

$$3 \overline{F_{\downarrow\downarrow_2}^I} = q'q \left[(M_1' + M_1)(M_2' + M_2) \left(\frac{1}{E_2'} + \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) + (M_1' + M_1)^2 \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right. \\ \left. + (M_1' + M_1)(E_2' + E_1' + E_2 + E_1) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) + (M_2' + M_2)^2 \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right. \\ \left. - (M_2' + M_2)(E_2' + E_1' + E_2 + E_1) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) + ((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + q'^2 + q^2) \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right]$$

$$3 \overline{F_{\downarrow\downarrow_2}^{II}} = 2 \left((E_1' - M_1')(E_1 - M_1) - (E_2' - M_2')(E_2 - M_2) \right)$$

$$68 \overline{F_{g_1g_2}} = - \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right)$$

$$68 \overline{F_{g_1\downarrow_2}} = - (M_2' + M_2) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) + (M_2' - M_2) \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \\ + (E_2' + E_1' + M_2' - M_1')(E_2 + E_1 + M_2 - M_1) \frac{E_2' + E_2}{E_2' E_2}$$

$$68 \overline{F_{g_2\downarrow_1}} = - (M_1' + M_1) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) + (M_1' - M_1) \left(\frac{E_2' - M_2'}{E_1'} - \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) \\ + (E_2' + E_1' + M_1' - M_2')(E_2 + E_1 + M_1 - M_2) \frac{E_1' + E_1}{E_1' E_1}$$

$$\begin{aligned}
 68 \quad \overline{F_{\downarrow_1 \downarrow_2}^I} &= - (M_1' + M_1) (M_2' + M_2) \left(1 + \frac{E_1' - M_1'}{E_2'} \right) \left(1 - \frac{E_2' - M_2'}{E_2} \right) + (M_1' + M_1) (M_2' - M_2) \left(\frac{E_1' - M_1'}{E_2'} - \frac{E_1 - M_1}{E_2} \right) \\
 &+ (M_1' + M_1) (E_2' + E_1' + M_2' - M_1') (E_2 + E_1 + M_2 - M_1) \frac{E_2' + E_2}{E_2' E_2} \\
 &+ (M_2' + M_2) (E_2' + E_1' + M_1' - M_2') (E_2 + E_1 + M_1 - M_2) \frac{E_1' + E_1}{E_1' E_1} \\
 &+ (M_2' + M_2) (M_1' - M_1) \left(\frac{E_2' - M_2'}{E_1'} - \frac{E_2 - M_2}{E_1} \right) - \left((E_1' + E_1) (E_2' + E_2) + q_1^2 + q^2 \right) \left(1 - \frac{(E_2' - M_2') (E_2 - M_2)}{E_1' E_1} \right)
 \end{aligned}$$

$$68 \quad \overline{F_{\downarrow_1 \downarrow_2}^{II}} = - 2 q_1 q \left(1 - \frac{(E_2' - M_2') (E_2 - M_2)}{E_1' E_1} \right)$$

Relativistische Ein-Boson-Austausch-Potentiale (vgl. Kap. 2.3)

skalar :

$$V^S(\vec{k}, \vec{p}) = K_S g_{s_1} g_{s_2} \left[V_0^S + V_{LS1}^S \cdot \frac{i}{2} \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) + V_{LS2}^S \cdot \frac{i}{2} \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) + V_{Skp}^S \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) \right]$$

$$V_0^S = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) \vec{k}^2 - \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} \right) \vec{p}^2 + \frac{1}{16 \varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \vec{k}^4 + \frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \vec{p}^4 - \frac{1}{2 \varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \vec{k}^2 \cdot \vec{p}^2$$

$$V_{LS1}^S = -\frac{2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} - \frac{1}{2 \varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \vec{k}^2 + \frac{2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \vec{p}^2$$

$$V_{LS2}^S = -\frac{2}{\varepsilon_2' \varepsilon_2} - \frac{1}{2 \varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \vec{k}^2 + \frac{2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \vec{p}^2$$

$$V_{Skp}^S = -\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2}$$

Den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Spin-Bahn-Operator erhält man durch:

symmetrisch: $\frac{1}{2} (V_{LS1} + V_{LS2})$

antisymmetrisch: $\frac{1}{2} (V_{LS1} - V_{LS2})$

pseudoskalar :

$$\begin{aligned}
 V^{PS}(\vec{k}, \vec{p}) = & K_{PS} g_{PS_1} g_{PS_2} \left\{ \left[\frac{1}{12} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} + \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) \vec{k}^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \vec{p}^2 \right] \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right. \\
 & + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} + \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) \vec{k}^2 \cdot S_{12}(\vec{k}) \\
 & + \left(\frac{1}{\epsilon_1'} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \vec{p}^2 \cdot S_{12}(\vec{p}) \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) k p \vec{\sigma}_1 \cdot \hat{p} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k} \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} + \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) k p \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k} \vec{\sigma}_2 \cdot \hat{p} \right\}
 \end{aligned}$$

vektor :

$$\begin{aligned}
 V^V(\vec{k}, \vec{p}) = -K_V \Big\{ & V_0^V + V_S^V \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_{Tk}^V \cdot S_{12}(\vec{k}) \\
 & + V_{Tp}^V \cdot S_{12}(\vec{p}) + V_{kp}^V \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k} \cdot \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{p} + V_{pk}^V \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{p} \cdot \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k} \\
 & + V_{LS1}^V \cdot \frac{i}{2} \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) + V_{LS2}^V \cdot \frac{i}{2} \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) \\
 & + V_{Skp}^V \cdot \vec{\sigma}_1 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) \cdot \vec{\sigma}_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{p}) \Big\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_0^V = & G_1 + G_2 \cdot k^2 + G_3 \cdot p^2 + G_4 \cdot \vec{k} \cdot \vec{p} + G_5 \cdot k^4 \\
 & + G_6 \cdot p^4 + G_7 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{p})^2 + G_8 \cdot k^2 \cdot p^2 \\
 & + G_9 \cdot k^2 \cdot \vec{k} \cdot \vec{p} + G_{10} \cdot p^2 \cdot \vec{k} \cdot \vec{p} + G_{11} \cdot p^6 \\
 & + G_{12} \cdot k^4 p^2 + G_{13} \cdot k^2 p^4
 \end{aligned}$$

$$G_1 = G_{V_1} G_{V_2} - \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} (E_2' + E_2) - \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} (E_1' + E_1) + \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} (E_1' + E_1)(E_2' + E_2)$$

$$G_2 = \frac{G_{V_1} G_{V_2}}{4} \left[\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_2'} \right) - \frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_2' E_2} \right] - \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{8\mu} (E_2' + E_2) \left(\frac{1}{E_2' E_2} - \frac{1}{E_1' E_1} \right)$$

$$G_3 = G_{V_1} G_{V_2} \left[\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_1'} \right) \left(\frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_2'} \right) + \frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right] + \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} \left(\frac{E_2' + E_2}{E_2' E_2} - \frac{E_2' + E_2 + 2E_1' + 2E_1}{E_1' E_1} \right) \\ + \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} \left(\frac{E_1' + E_1}{E_1' E_1} - \frac{E_1' + E_1 + 2E_2' + 2E_2}{E_2' E_2} \right) - \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} \left((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) - 4 \right)$$

$$G_4 = G_{V_1} G_{V_2} \left(\frac{1}{E_1' E_1} - \frac{1}{E_1 E_2} \right) - \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_1'} \right) - \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} \left(\frac{1}{E_2'} - \frac{1}{E_2} \right)$$

$$G_5 = \frac{G_{V_1} G_{V_2}}{16 E_1' E_1 E_2' E_2} + \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} \cdot \frac{E_2' + E_2}{16 E_1' E_1 E_2' E_2} + \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} \cdot \frac{E_1' + E_1}{16 E_1' E_1 E_2' E_2} + \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} \cdot \frac{(E_1' + E_1)(E_2' + E_2)}{16 E_1' E_1 E_2' E_2}$$

$$G_6 = \frac{G_{V_1} G_{V_2}}{E_1' E_1 E_2' E_2} + \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} \cdot \frac{E_2' + E_2 + 2E_1' + 2E_1}{E_1' E_1 E_2' E_2} + \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} \cdot \frac{E_1' + E_1 + 2E_2' + 2E_2}{E_1' E_1 E_2' E_2} \\ + \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} \left(\frac{(E_1' + E_1)(E_2' + E_2)}{E_1' E_1 E_2' E_2} - 4 \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right)$$

$$G_7 = - \frac{G_{V_1} G_{V_2}}{E_1' E_1 E_2' E_2}$$

$$G_8 = \frac{G_{V_1} G_{V_2}}{2 E_1' E_1 E_2' E_2} - \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} \cdot \frac{E_2' + E_2 + E_1' + E_1}{2 E_1' E_1 E_2' E_2} - \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} \cdot \frac{E_1' + E_1 + E_2' + E_2}{2 E_1' E_1 E_2' E_2} \\ - \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} \left(\frac{(E_1' + E_1)(E_2' + E_2)}{2 E_1' E_1 E_2' E_2} - \left(\frac{1}{E_1' E_1} + \frac{1}{E_2' E_2} \right) \right)$$

$$G_9 = - \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} \cdot \frac{1}{4 E_2' E_2} \left(\frac{1}{E_1'} - \frac{1}{E_1} \right) - \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} \cdot \frac{1}{4 E_1' E_1} \left(\frac{1}{E_2'} - \frac{1}{E_2} \right)$$

$$G_{10} = \frac{G_{V_1} f_{V_2}}{2\mu} \cdot \frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) + \frac{G_{V_2} f_{V_1}}{2\mu} \cdot \frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_1} \left(\frac{1}{\epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_2} \right)$$

$$G_{11} = \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} \cdot \frac{4}{\epsilon_1' \epsilon_1 \epsilon_2' \epsilon_2}$$

$$G_{12} = \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} \cdot \frac{1}{4\epsilon_1' \epsilon_1 \epsilon_2' \epsilon_2}$$

$$G_{13} = - \frac{f_{V_1} f_{V_2}}{4\mu^2} \cdot \frac{2}{\epsilon_1' \epsilon_1 \epsilon_2' \epsilon_2}$$

$$V_S^V = - G_{V_1} G_{V_2} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} + \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) k^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \vec{p}^2 + \left(\frac{1}{\epsilon_1' \epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \right) k \cdot \vec{p} \right]$$

$$V_{Th}^V = G_{V_1} G_{V_2} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} + \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) \frac{1}{4} k^2$$

$$V_{Tp}^V = G_{V_1} G_{V_2} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \vec{p}^2$$

$$V_{kp}^V = G_{V_1} G_{V_2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} + \frac{1}{\epsilon_2} \right) k p$$

$$V_{pk}^V = G_{V_1} G_{V_2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1'} + \frac{1}{\epsilon_1} \right) \left(\frac{1}{\epsilon_2'} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) k p$$

$$\begin{aligned}
 V_{LS1}^V = & k p \left\{ G_{V_1} G_{V_2} \cdot 2 \left(\frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2' \varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_2} \right) - \frac{G_{V_1} \not{\varepsilon}_2}{\mu} \frac{\varepsilon_2' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1' + \varepsilon_1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} + \frac{G_{V_2} \not{\varepsilon}_1}{\mu} \frac{\varepsilon_1' + \varepsilon_1}{\varepsilon_1' \varepsilon_2} \right. \\
 & \left. - \frac{\not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_2}{2\mu^2} \frac{(\varepsilon_1' + \varepsilon_1)(\varepsilon_2' + \varepsilon_2)}{\varepsilon_1' \varepsilon_1} \right. \\
 & - \frac{1}{2\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \left[G_{V_1} G_{V_2} + \frac{G_{V_1} \not{\varepsilon}_2}{2\mu} (\varepsilon_2' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1' + \varepsilon_1) + \frac{G_{V_2} \not{\varepsilon}_1}{2\mu} (\varepsilon_1' + \varepsilon_1) \right. \\
 & \left. + \frac{\not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_2}{4\mu^2} (\varepsilon_1' + \varepsilon_1)(\varepsilon_2' + \varepsilon_2) \right] \not{k}^2 \\
 & + \frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \left[2 G_{V_1} G_{V_2} + \frac{G_{V_1} \not{\varepsilon}_2}{\mu} (\varepsilon_2' + \varepsilon_2 + \varepsilon_1' + \varepsilon_1) + \frac{G_{V_2} \not{\varepsilon}_1}{\mu} (\varepsilon_1' + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2' + 2\varepsilon_2) \right. \\
 & \left. + \frac{\not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_2}{2\mu^2} \left((\varepsilon_1' + \varepsilon_1)(\varepsilon_2' + \varepsilon_2) - 4\varepsilon_2' \varepsilon_2 \right) \right] \not{p}^2 \\
 & - \frac{G_{V_2} \not{\varepsilon}_1}{\mu} \frac{\varepsilon_2' - \varepsilon_2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \not{k} \cdot \not{p} + \frac{\not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_2}{\mu^2} \frac{2}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \not{p}^4 \\
 & - \frac{\not{\varepsilon}_1 \not{\varepsilon}_2}{2\mu^2} \frac{1}{\varepsilon_1' \varepsilon_1 \varepsilon_2' \varepsilon_2} \not{k}^2 \cdot \not{p}^2 \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{LS2}^V = k p \left\{ G_{V_1} G_{V_2} 2 \left(\frac{1}{E_2' E_2} + \frac{1}{E_1' E_2} + \frac{1}{E_2' E_1} \right) - \frac{G_{V_2} \not{p}_{V_1}}{\mu} \frac{E_1' + E_1 + E_2' + E_2}{E_2' E_2} + \frac{G_{V_1} \not{p}_{V_2}}{\mu} \frac{E_2' + E_2}{E_2' E_2} \right. \\
 \left. - \frac{\not{p}_{V_2} \not{p}_{V_1}}{2\mu^2} \frac{(E_2' + E_2)(E_1' + E_1)}{E_2' E_2} \right. \\
 \left. - \frac{1}{2 E_1' E_1 E_2' E_2} \left[G_{V_1} G_{V_2} + \frac{G_{V_2} \not{p}_{V_1}}{2\mu} (E_1' + E_1 + E_2' + E_2) + \frac{G_{V_1} \not{p}_{V_2}}{2\mu} (E_2' + E_2) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\not{p}_{V_1} \not{p}_{V_2}}{4\mu^2} (E_2' + E_2)(E_1' + E_1) \right] \not{k}^2 \right. \\
 \left. + \frac{1}{E_1' E_1 E_2' E_2} \left[2 G_{V_1} G_{V_2} + \frac{G_{V_2} \not{p}_{V_1}}{\mu} (E_1' + E_1 + E_2' + E_2) + \frac{G_{V_1} \not{p}_{V_2}}{\mu} (E_2' + E_2 + 2 E_1' + 2 E_1) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\not{p}_{V_1} \not{p}_{V_2}}{2\mu^2} ((E_2' + E_2)(E_1' + E_1) - 4 E_1' E_1) \right] \not{p}^2 \right. \\
 \left. - \frac{G_{V_1} \not{p}_{V_2}}{\mu} \frac{E_1' - E_1}{E_1' E_1 E_2' E_2} \not{k} \cdot \not{p} + \frac{\not{p}_{V_1} \not{p}_{V_2}}{\mu^2} \frac{2}{E_1' E_1 E_2' E_2} \not{p}^4 \right. \\
 \left. - \frac{\not{p}_{V_1} \not{p}_{V_2}}{2\mu^2} \frac{1}{E_1' E_1 E_2' E_2} \not{k}^2 \not{p}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{SKP}^V = - \frac{1}{E_1' E_1 E_2' E_2} \left[G_{V_1} G_{V_2} + \frac{G_{V_1} \not{p}_{V_2}}{2\mu} (E_2' + E_2 + E_1' + E_1) \right. \\
 \left. + \frac{G_{V_2} \not{p}_{V_1}}{2\mu} (E_1' + E_1 + E_2' + E_2) \right. \\
 \left. + \frac{\not{p}_{V_1} \not{p}_{V_2}}{4\mu^2} ((E_1' + E_1)(E_2' + E_2) + 4 \not{p}^2) \right]
 \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen center of mass system und Laborsystem

Die Umrechnung ergibt sich durch Gleichsetzen der invarianten Massenquadrate in beiden Systemen:

$$S_{\text{CMS}} = S_{\text{LAB}} \quad (\text{A4.1})$$

Die beiden einlaufenden Teilchen haben die Viererimpulse p_1, p_2 .
Dann ist:

$$\begin{aligned} S_{\text{CMS}} &= (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2 p_1 p_2 \\ &= E_1^2 - \vec{p}_1^2 + E_2^2 - \vec{p}_2^2 + 2 E_1 E_2 - 2 \vec{p}_1 \vec{p}_2 \end{aligned}$$

Da im CMS: $\cos(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = -1$, $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p$ folgt mit $E = (\vec{p}^2 + M^2)^{1/2}$

$$S_{\text{CMS}} = M_1^2 + M_2^2 + 2 E_1 E_2 + 2 p^2$$

Im Laborsystem ($\vec{p}_2 = 0$) ist

$$S_{\text{LAB}} = (p_1 + p_2)^2 = M_1^2 + M_2^2 + 2 E_1 E_2$$

Für das ΛN -System $(p_1 = p_\Lambda, p_2 = p_N; M_1 = M_\Lambda, M_2 = M_N)$

wird damit aus Gl.A4.1 :

$$E_\Lambda^{\text{CMS}} E_N^{\text{CMS}} + p_{\text{CMS}}^2 = E_\Lambda^{\text{LAB}} E_N^{\text{LAB}}$$

$$(p_{\text{CMS}}^2 + M_\Lambda^2)^{1/2} (p_{\text{CMS}}^2 + M_N^2)^{1/2} + p_{\text{CMS}}^2 = E_\Lambda^{\text{LAB}} \cdot M_N \quad \left\{ \vec{p}_N^{\text{LAB}} = 0 \right\}$$

Daraus folgt mit der Entwicklung der Wurzeln: $(p^2 + M^2)^{1/2} \approx M \left(1 + \frac{p^2}{2M^2} \right)$

$$E_\Lambda^{\text{LAB}} = M_\Lambda + \underbrace{\frac{(M_N + M_\Lambda)^2}{2 M_N^2 M_\Lambda} p_{\text{CMS}}^2 + \frac{1}{4 M_N^2 M_\Lambda} p_{\text{CMS}}^4}_{= T_\Lambda^{\text{LAB}}}$$

Wird in der kinetischen Energie T_Λ^{LAB} des Λ -Teilchens

$$T_\Lambda^{\text{LAB}} = \frac{p_{\text{CMS}}^2}{2 M_N^2 M_\Lambda} \left((M_N + M_\Lambda)^2 + \frac{p_{\text{CMS}}^2}{2} \right)$$

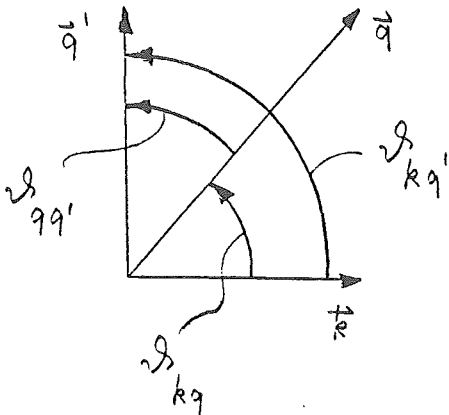
der p^2 -Term gegenüber den Massen vernachlässigt, dann erhält man folgenden Zusammenhang zwischen CMS und LAB:

$$p_{\text{CMS}}^2 = \frac{2 M_N^2 M_\Lambda}{(M_N + M_\Lambda)^2} \cdot T_\Lambda^{\text{LAB}}$$

Berechnung des Integrals aus Kap. 4.2

$$I = \int d\hat{k} \, d_{h\lambda'}^{J'}(\vartheta_{q'k}) d_{\lambda h}^{J''}(\vartheta_{kq})$$

Wie liegen die Winkel zueinander?



Nach (ED64) S.80 f gilt:

$$d_{m'm}^{J'}(\vartheta_{kq'}) = \sum_{m''} d_{m'm''}^{J'}(\vartheta_{qq'}) d_{m''m}^{J'}(\vartheta_{kq})$$

Mit der Symmetrieeigenschaft der d-Funktion $d_{m'm}^{J'}(\vartheta_{kq'}) = d_{mm'}^{J'}(\vartheta_{q'k})$

erhält man

$$d_{h\lambda'}^{J'}(\vartheta_{q'k}) = \sum_{m''} d_{\lambda'm''}^{J'}(\vartheta_{qq'}) d_{m''h}^{J'}(\vartheta_{kq})$$

Damit wird

$$I = \sum_{m''} \int d\hat{k} \, d_{\lambda'm''}^{J'}(\vartheta_{qq'}) d_{m''h}^{J'}(\vartheta_{kq}) d_{\lambda h}^{J''}(\vartheta_{kq})$$

Orthogonalitätsrelation $= \frac{4\pi}{2J'+1} \delta_{J'J''} \delta_{m''\lambda} \delta_{hh}$

Somit wird das Integral

$$I = \frac{4\pi}{2J'+1} d_{\lambda'\lambda}^{J'}(\vartheta_{qq'}) \delta_{J'J''}$$

Literatur

- BD66: J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistische Quantenmechanik, BI 98 (1966)
- BOU80: A. Bouyssy, Phys. Lett. 91B, 15 (1980)
- BR70: A.R. Bodmer, D.M. Rote, Nucl. Phys. A148, 97 (1970)
- BR73: A.R. Bodmer, D.M. Rote, Nucl. Phys. A201, 145 (1973)
- CHK71: Suh Urk Chung, Spin Formalisms, Lectures given at CERN, Geneva (1971)
- DH70: J. Dabrowski, M.Y.M. Hassan, Phys. Rev. 1, 1883 (1970)
- ED64: A.R. Edmonds, Drehimpulse in der Quantenmechanik, BI (1964)
- ERK74: K. Erkelenz, Phys. Rep. (Section C of Phys. Lett.) 13, No. 5, 191 (1974)
- GRE79: W. Greiner, Quantenmechanik II, Verlag Harry Deutsch (1979)
- HTS65: R.C. Herndong, Y.C. Tang, E.W. Schmid, Phys. Rev. 137, B294 (1965)
- HT67: R.C. Herndong, Y.C. Tang, Phys. Rev. 153, 1091 (1967)
- HT70: M.I. Haftel, F. Tabakin, Nucl. Phys. A158, 1 (1970)
- JOA75: C.J. Joachain, Quantum Collision Theory, Chapter 18, North-Holland Publ. Comp. (1975)
- KB65: T.T.S. Kuo, G.E. Brown, Phys. Lett. 18, 54 (1965)
- KOT74: K. Kotthoff, Dissertation (Univ. Bonn, 1974)
- NAG75: M.M. Nagels, Baryon-Baryon Scattering in a One-Boson-Exchange Potential Model, Proefschrift (1975)
- NRS75: M.M. Nagels, T.A. Rijken, J.J. de Swart, Phys. Rev. D12, 744 (1975)
- NRS77: M.M. Nagels, T.A. Rijken, J.J. de Swart, Phys. Rev. D15, 2547 (1977)
- NRS79: M.M. Nagels, T.A. Rijken, J.J. de Swart, Phys. Rev. D20, 1633 (1979)
- RAY76: M. Ray et al., Ann. Phys. 102, 226 (1976)
- RAY81: M. Ray et al., Nucl. Phys. A 381 (1981)

ROL71: H. Rollnik, Teilchenphysik II, BI 759 (1971)

VER76: P.A.Verhoeven, Off-Shell Baryon-Baryon Scattering, Proefschrift
(1976)

Danksagung

Zuerst möchte ich Prof. J. Speth danken für die Unterstützung und Betreuung meiner Diplomarbeit und für das ständige Interesse, das er dieser Arbeit und deren Ergebnissen in jedem Stadium entgegenbrachte.

Ganz besonders möchte ich Dr. K. Holinde danken für die Mühe und Zeit, die er für die Betreuung dieser Arbeit aufbrachte, sowie für die vielen Ratschläge und die ständige Bereitschaft, auftretende physikalische Probleme zu diskutieren. Dadurch hat er mir sehr geholfen, mich in die Mesontheorie der starken Wechselwirkung einzuarbeiten. Für die Computerprogramme, die ich in dieser Arbeit verwenden konnte, und für die Hilfe im Umgang mit diesen großen Programmpaketen möchte ich ihm ebenfalls danken.

Kanzo Nakayama möchte ich danken, der immer wieder bereit war, physikalische Fragen mit mir zu diskutieren. Besonders in meiner Anfangszeit in diesem Institut hat er mir sehr geholfen.

Danken möchte ich auch Rainer Büttgen für seine ständige Diskussionsbereitschaft über physikalische Probleme, die unsere beiden Arbeiten betrafen.

Für die zahlreichen Tips und Hilfestellungen bei numerischen Problemen und bei der Anwendung des Plot-Programms möchte ich Roland Gissler und Alfred Schulte danken.

Ein ganz besonderes Dankeschön gilt Frau M. Heese für das Tippen des Manuskripts mit den vielen endlos langen Formeln.

Allen anderen Mitgliedern der Theorie-Gruppe danke ich für die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre.

